PATRULATERE INSCRIPTIBILE

ABSTRACT. În articolul de faţă sunt prezentate condiţii necesare şi suficiente pentru ca un patrulater să fie inscriptibil, precum şi câteva probleme reprezentative.

Lecţia se adresează clasei a VIII-a.
Data: noiembrie 2011
Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

Noţiuni introductive

Pentru o bună înţelegere a noţiunilor legate de patrulaterul inscriptibil este necesar să reamintim câteva rezultate legate de măsura unghiurilor în legătură cu măsura unor arce de cerc.

Este bine cunoscut rezultatul următor:

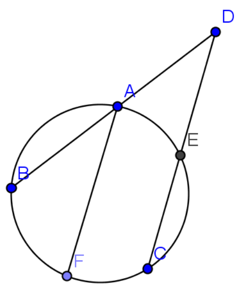
Teoremă: Măsura unghiului înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturi.

Vom prezenta mai jos încă două rezultate, unul legat de unghiul exterior unui cerc şi altul legat de unghiul interior unui cerc.

Definiţie: Numim unghi exterior unui cerc unghiul cu vârful în exteriorul cercului şi laturile secante la cerc.

Teoremă: Măsura unghiului exterior unui cerc este egală cu semidiferenţa arcelor cuprinse între laturi.

Demonstraţie: Trebuie demonstrat că $m(\widehat{BDC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{AE})}{2}$.

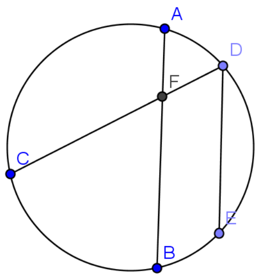


Construind $AF \parallel DC$ avem $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BAF}$ ca unghiuri corespondente. Cum unghiul BAF este unghi înscris în cerc avem $m(\widehat{BAF}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BF})}{2} = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{FC})}{2}$. Deoarece $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BAF}$ putem scrie $m(\widehat{BDC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{FC})}{2}$. Din $EC \parallel AF$ rezultă $m(\overset{\frown}{FC}) = m(\overset{\frown}{AE})$ şi atunci rezultă $m(\widehat{BDC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{AE})}{2}$.

Definiţie: Numim unghi interior unui cerc unghiul cu vârful în interiorul cercului şi laturile coarde în cerc.

Teoremă: Măsura unghiului interior unui cerc este egală cu semisuma arcelor cuprinse între laturi.

Demonstraţie: Trebuie demonstrat că $m(\widehat{CFB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD})}{2}$.



Construind $DE \parallel AB$ avem $\widehat{CFB} \equiv \widehat{CDE}$ ca unghiuri corespondente. Cum unghiul CDE este unghi înscris în cerc avem $m(\widehat{CDE}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{CE})}{2} = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{BE})}{2}$. Deoarece $\widehat{CFB} \equiv \widehat{CDE}$ putem scrie $m(\widehat{CFB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{BE})}{2}$. Din $DE \parallel AB$ rezultă $m(\overset{\frown}{BE}) = m(\overset{\frown}{AD})$ şi atunci rezultă $m(\widehat{CFB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD})}{2}$.

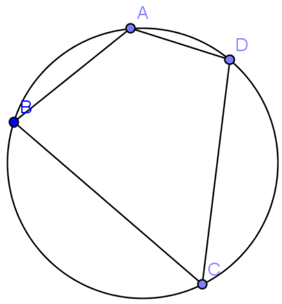
Definiţie: Numim patrulater inscriptibil un patrulater ale cărui vârfuri sunt pe un cerc.

Observaţie: Dacă A, B, C, D sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil se spune că punctele A, B, C, D sunt conciclice.

Condiţii necesare şi suficiente pentru ca un patrulater să fie inscriptibil

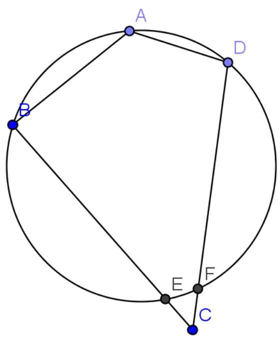
Teoremă: Un patrulater este inscriptibil dacă şi numai dacă unghiurile opuse sunt suplementare.

Demonstraţie: Demonstrăm implicaţia: Dacă $ABCD$ este patrulater inscriptibil, atunci $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^0$ şi $m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180^0$.



Unghiurile BAD şi BCD sunt unghiuri înscrise în cerc şi deci $m(\widehat{BAD}) = \dfrac{m(B\overset{\frown}{C}D)}{2}$ şi $m(\widehat{BCD}) = \dfrac{m(B\overset{\frown}{A}D)}{2}$. Atunci $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = \dfrac{m(B\overset{\frown}{C}D)}{2} + \dfrac{m(B\overset{\frown}{A}D)}{2} = \dfrac{360^0}{2} = 180^0$. Analog pentru unghiurile ABC şi ADC.

Demonstrăm acum implicaţia: Dacă $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^0$, atunci $ABCD$ este patrulater inscriptibil. Presupunem că cele patru puncte A, B, C, D



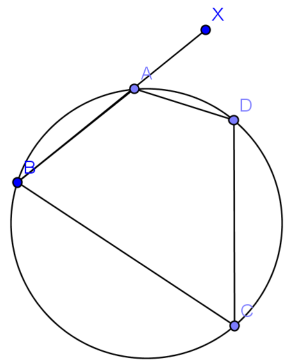
nu sunt pe un cerc. Trei puncte sunt totdeauna pe un cerc, fie acestea A, B şi D. Dacă C nu se află pe cercul determinat de punctele A, B şi D, atunci el este în interiorul sau în exteriorul acestui cerc. Făra a pierde din generalitatea problemei considerăm că punctul C este în exterior. Fie E respectiv F intersecţiile cercului cu BC respectiv DC.

Avem $m(\widehat{BAD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BEFD})}{2}$ (unghi înscris în cerc) şi $m(\widehat{BCD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BAD}) - m(\overset{\frown}{EF})}{2}$ (unghi exterior cercului).

Atunci $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BEFD})}{2} + \dfrac{m(\overset{\frown}{BAD}) - m(\overset{\frown}{EF})}{2} = \dfrac{360^0 - m(\overset{\frown}{EF})}{2} < 180^0$. Această ultimă afirmaţie estre în contradicţie cu afirmaţia din ipoteză că $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^0$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi deci punctele A, B, C, D sunt pe acelaşi cerc.

Teoremă: Un patrulater este inscriptibil dacă şi numai dacă un unghi interior este congruent cu unghiul exterior opus.

Demonstraţie: Teorema este o consecinţă a teoremei anterioare.

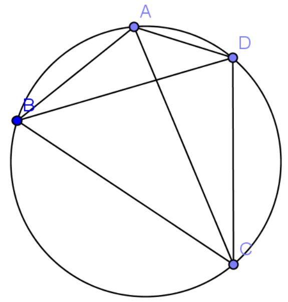


Din $\widehat{BCD} \equiv \widehat{XAD}$ şi $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAX}) = 180^0$ rezultă $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = 180^0$ şi am ajuns la teorema anterioară.

Teoremă: Un patrulater este inscriptibil dacă unghiul format de o diagonală cu una dintre laturi este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.

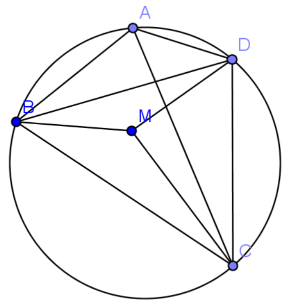
Demonstraţie: Ar trebui demonstrat, de exemplu, că $ABCD$ este patrulater inscriptibil $\Leftrightarrow \widehat{DBC} \equiv \widehat{DAC}$.

Lăsăm ca exerciţiu această demonstraţie.



Teoremă: (*Teorema lui Ptolemeu*) Un patrulater este inscriptibil dacă şi numai dacă produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.

Demonstraţie: Se pot da mai multe demonstraţii la această teoremă. O preferăm pe aceasta deoarece este mai accesibilă.



Considerăm M un punct în acelaşi semiplan cu A în raport cu BC, astfel încât $\widehat{MBC} \equiv \widehat{DAC}$ şi $\widehat{MCB} \equiv \widehat{ACD}$. De aici deducem că $\triangle MBC \sim \triangle DAC$. Atunci $\dfrac{MB}{DA} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{MC}{DC}$, de unde $MB = \dfrac{AD \cdot BC}{AC}$ (*).

Pe de altă parte, din $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{MC}{DC}$ şi $\widehat{MCD} \equiv \widehat{BCA}$ rezultă $\triangle MCD \sim \triangle BCA$ şi atunci $\dfrac{MD}{BA} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{MC}{BC}$, de unde $MD = \dfrac{AB \cdot CD}{AC}$ (* *).

Să demonstrăm acum afirmaţia: $ABCD$ este patrulater inscriptibil, atunci $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Dacă $ABCD$ este patrulater inscriptibil atunci $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DBC}$ şi cum, din construcţie, $\widehat{MBC} \equiv \widehat{DAC}$ rezultă $\widehat{MBC} \equiv \widehat{DBC}$, de unde $M \in (BD)$. Atunci $BD = BM + MD$. Înlocuind BM şi MD cu rezultatele obţinute la (*) şi (* *) rezultă $BD = \dfrac{AD \cdot BC}{AC} + \dfrac{AB \cdot CD}{AC}$, de unde relaţia $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

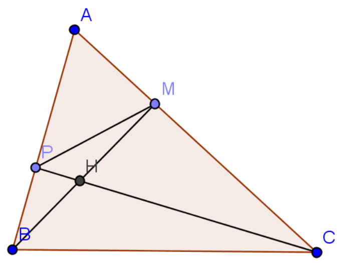
Să demonstrăm acum afirmaţia: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, atunci $ABCD$ este patrulater inscriptibil.

Relaţia $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ se scrie $BD = \frac{AD \cdot BC}{AC} + \frac{AB \cdot CD}{AC}$ şi ţinând cont de (*) şi (* *) avem $BD = BM + MD$, de unde $M \in (BD)$. Atunci $\widehat{DBC} \equiv \widehat{MBC} \equiv \widehat{DAC}$ şi conform unei teoreme anterioare rezultă $ABCD$ este patrulater inscriptibil.

Probleme

Problema 1: În triunghiul ABC înălţimile BM ($M \in (AC)$) şi CP ($P \in (AB)$) se intersectează în H. Arătaţi că patrulaterele $APHM$ şi $BCMP$ sunt inscriptibile.

Soluţie: BM înălţime, atunci $m(\widehat{BMA}) = 90^0$ (1). Analog $m(\widehat{CPA}) = 90^0$.

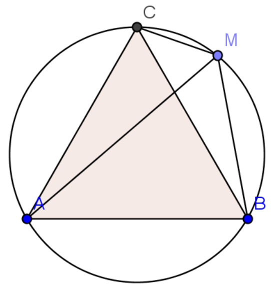


Atunci, în patrulaterul $APHM$ avem $m(\widehat{BMA}) + m(\widehat{CPA}) = 180^0$, deci patrulaterul este inscriptibil (unghiurile opuse sunt suplementare).

În patrulaterul $BCMP$ avem $\widehat{BPC} \equiv \widehat{BMC} (= 90^0)$ şi deci este inscriptibil (unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă).

Problema 2: Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct pe arcul mic BC al cercului circumscris triunghiului. Arătaţi că $MA = MB + MC$.

Soluţie: Patrulaterul $ABMC$ este înscris în cerc şi atunci, din teorema



lui Ptolemeu, avem $AM \cdot BC = BM \cdot AC + CM \cdot AB$.

Cum $[AB] \equiv [AC] \equiv [BC]$ rezultă $AM = MB + MC$.

Bibliografie:

[1] Panaitopol M E, Panaitopol L, Probleme calitative de geometrie plană, Editura Gil, 1996

[2] Mihalca D, Chiţescu I, Chiriţă M, Geometria patrulaterului, Teora, 1998