PREZENTARE CONCURSUL PANAITOPOL/IMAR 2014

Abstract. Presentation with solutions for the problems of the IMAR (Seniors) Test, and selected other problems of the Laurenţiu Panaitopol Competition 2014.

Data: 25 noiembrie 2014.
Autor: Dan S, Bucureşti.

My drakkar is already sailing forth to Valhöll.[1]
Between Popocatépetl and Ixtaccihuatl.

0. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii şi de soluţii ale autorului, asupra Testului (Seniori) IMAR, ediţia a XII-a, precum şi a unor probleme spicuite de la probele pe clasă ale concursului Laurenţiu (Bebe) Panaitopol, ediţia a VII-a (anul 2014), este, după cum ne-am obişnuit, opinia personală a autorului.[2]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

1. Testul Seniori – IMAR xii

Subiectul (1)**.** *Fie ABC un triunghi şi fie M mijlocul laturii BC. Cercul de centru M şi rază MA intersectează a doua oară dreptele AB şi AC în punctele B', respectiv C', iar tangentele acestui cerc în B' şi C' se intersectează în punctul D. Arătaţi că mijlocul segmentului AD este situat pe mediatoarea laturii BC.*

Eram pe punctul să selecţionez următoarea problemă (dintr-o sursă anonimă de pe AoPS) pentru concursul "Stelele Matematicii" 2014; norocul face că în ultimul moment am avut informaţia faptului că o problemă extrem de înrudită fusese deja selecţionată pentru Testul IMAR.

---

[1]Sverre Sigurdsson.

Les noms des glaives du roi Charlemagne et de ses barons.

Charlemagne	*Joyeuse*
Roland	*Durendal*
Olivier	*Halteclere*
Turpin	*Almace*

[2]Consultaţi enunţurile şi soluţiile oficiale ale Testului tip OIM Seniori IMAR, precum şi ale probelor pe clase VI – XII; de asemenea rezultatele (mai puţin medaliile), la `http://ssmr.ro/activitati/concursuri/Laurentiu_Panaitopol_2014`.

Fie ABC un triunghi şi fie M mijlocul laturii BC. Cercul ω de diametru MA intersectează a doua oară dreptele AB şi AC în punctele E, respectiv F, iar tangentele acestui cerc în E şi F se intersectează în punctul P. Arătaţi că punctul P este situat pe mediatoarea laturii BC.

Soluţie. Cele două configuraţii sunt legate printr-o omotetie de centru A şi raţie $1/2$, care trimite punctele B', C' în E, F, şi care trimite punctul D în P, care este deci mijlocul segmentului AD. Pentru conformitate, mai jos sunt trei soluţii alternative, păstrate în original în limba engleză, de pe AoPS. $\square$

Solution. Let ω_1 and ω_2 be the circumcircles of triangles BME, respectively CMF; they are of equal radius and tangent at M. Let us prove P has equal powers with respect to them.

Let $\{E, K\} = EP \cap \omega_1$ and $\{F, L\} = FP \cap \omega_2$. From the cyclic quadrilateral $MEBK$ we get $\angle KBM = \angle MEK = \angle MAE$, while from the cyclic quadrilateral $CFML$ we get $\angle LCM = \angle LFM = \angle FAM$. Therefore $\angle ABK + \angle ACL = 180^\circ$; thus we see $EK = FL$ (from $BM \sin \angle EBK = CM \sin \angle FCL$), so $PK \cdot PE = PL \cdot PF$, and so P lies onto the common internal tangent of ω_1, ω_2, the perpendicular bisector of BC. $\square$

Alternative Solution. (Synthetic) Let Y and Z be the points of intersection of ME and AC, respectively MF and AB. According to Boutin's theorem applied to $\triangle AEF$, it will follow that P is the midpoint of YZ and the points Y, Z, E and F are concyclic. By a converse of the Butterfly theorem, we are done. $\square$

Alternative Solution. (Projective) Extend the ray PM to meet ω for a second time at X. Let Ω be the intersection of the lines AX and BC.

Then, since the tangents to ω at E and F meet on the line MX, it will follow that $EMFX$ is a harmonic quadrilateral. By taking the pencil $A(EMFX)$ and intersecting it with the line BC, it will follow that $(BMC\Omega)$ is a harmonic division. Therefore $\dfrac{\Omega B}{\Omega C} = \dfrac{MB}{MC} = 1$. This implies that Ω is the point at infinity on BC, hence the lines AX and BC are parallel. Therefore $\angle BMP = 90^\circ$, and so PM is the perpendicular bisector of BC. $\square$

Subiectul (2)**.** *Fie ε un număr real strict pozitiv. Un număr natural este ε-**pătratic**, dacă el este produsul a două numere naturale a şi b, astfel încât $1 < a < b < (1+\varepsilon)a$. Arătaţi că există o infinitate de secvenţe de câte şase numere naturale ε-pătratice consecutive.*

Soluţie. Problema se reduce la un exerciţiu de găsire de identităţi polinomiale. Avem $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ şi $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$. Apoi, avem $(x^2+x-2)^2 = (x-1)^2(x+2)^2$, $(x^2+x-2)^2 - 2 = (x^2-2)(x^2+2x-1)$ şi $(x^2+x-2)^2 - 5 = (x^2-x-1)(x^2+3x+1)$. Finalmente, ajungem să avem şi $(2y^2-2)^2 - 3 = (2y^2-2y-1)(2y^2+2y-1)$. Pentru a putea folosi aceste identităţi trebuie verificat mai întâi raportul asimptotic al factorilor.

$$\lim_{X\to\infty} \frac{X-1}{X+1} = \lim_{X\to\infty} \frac{X-2}{X+2} = 1,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{(x+2)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x^2+2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-1}{x^2+3x+1} = 1,$$
$$\lim_{y\to\infty} \frac{2y^2-2y-1}{2y^2+2y-1} = 1.$$

Nu rămâne decât să reconciliem aceste factorizări $X = x^2+x-2 = 2y^2-2$, şi atunci numerele $X^2-5, X^2-4, X^2-3, X^2-2, X^2-1, X^2$, vor forma o secvenţă de şase numere naturale ε-pătratice consecutive, pentru o infinitate de valori suficient de mari pe care le vom găsi pentru X.

Dar condiţia $x^2+x-2 = 2y^2-2$ se scrie $(2x+1)^2 - 2(2y)^2 = 1$, o ecuaţie Pell cu soluţie primitivă $(2x_0+1, 2y_0) = (3,2)$, adică $(x_0, y_0) = (1,1)$, şi familia infinită de soluţii date de recurenţa

$$2x_{n+1}+1 = 3(2x_n+1) + 4(2y_n) \text{ şi } 2y_{n+1} = 2(2x_n+1) + 3(2y_n),$$

adică $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n + 1$ şi $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n + 1$, pentru $n \geq 0$. $\square$

Remarcă. Identităţi diferite care conduc la factorizări potenţial favorabile există; de exemplu $(x^4+x^2+1) - 3 = (x^2-1)(x^2+2)$, $(x^4+x^2+1) - 1 = x^2(x^2+1)$, $x^4+x^2+1 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$, cu raportul asimptotic al factorilor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = 1.$$

Nu se întâmplă deloc des ca **toţi** participanţii, cei mai buni 34 de olimpici din ţară, să obţină *in corpore* nota zero! Identităţile folosite sunt destul de obscure, iar rezultatul este mai mult o curiozitate, provenit dintr-o coincidenţă aproape întâmplătoare, mai bine lăsat pentru "ronţăială" acasă.

Subiectul (3). *Fie f un polinom primitiv cu coeficienţi întregi (cel mai mare divizor comun al lor este 1),*[3] *astfel încât f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, iar $f(X^2)$ este reductibil în $\mathbb{Q}[X]$. Arătaţi că $f = \pm(u^2 - Xv^2)$, unde u şi v sunt polinoame cu coeficienţi întregi.*

De exemplu, dacă a şi b sunt numere întregi coprime între ele şi a este impar, atunci $f = a^4X^2 + 4b^4$ este un polinom primitiv cu coeficienţi întregi, ireductibil în $\mathbb{R}[X] \supset \mathbb{Q}[X]$, $f(X^2) = a^4X^4 + 4b^4 = (a^2X^2 - 2abX + 2b^2)(a^2X^2 + 2abX + 2b^2)$ este reductibil în $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$ şi $f = (a^2X + 2b^2)^2 - X \cdot (2ab)^2$.

Soluţie. (L. Ploscaru) Ireductibilitatea în $\mathbb{Q}[X]$ este echivalentă cu cea din $\mathbb{Z}[X]$ (lema lui Gauss). Fie atunci o factorizare $f(X^2) = g(X)h(X)$, unde $g, h \in \mathbb{Z}[X]$, $1 \leq \deg g, \deg h < 2\deg f$, desigur cu $\deg g + \deg h = 2\deg f$, $c(g) = c(h) = 1$ (tot din lema lui Gauss), şi $g(X)$ ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$. Avem şi $f(X^2) = f((-X)^2) = g(-X)h(-X)$, cu $g(-X)$ evident şi el ireductibil. Atunci una din două.

[3] Acest cel mai mare divizor comun al coeficienţilor lui f se numeşte *conţinutul* $c(f)$ al polinomului $f \in \mathbb{Z}[X]$.

• c. m. m. d. c.$(g(X), g(-X)) = g(X)$, de unde $g(X) = \pm g(-X)$. Dacă $g(X) = g(-X)$, atunci $g(X) = r(X^2)$ pentru un anume polinom $r \in \mathbb{Z}[X]$. Atunci din $r(X^2) \mid f(X^2)$ rezultă $r(X) \mid f(X)$, absurd, căci avem relaţia de grade $1 \leq \deg r = \dfrac{1}{2} \deg g < \deg f$. Dacă dimpotrivă, $g(X) = -g(-X)$, atunci din $X \mid g(X) \mid f(X^2)$ rezultă $X \mid f(X)$, aşadar $f(X) = \pm X$, de forma cerută (cu $u \equiv 0$ şi $v \equiv 1$).

• c. m. m. d. c.$(g(X), g(-X)) = 1$, de unde $g(X)g(-X) \mid f(X^2)$. Luând $s(X) = g(X)g(-X)$, avem $s(X) = s(-X)$, deci $s(X) = r(X^2)$ pentru un anume polinom $r \in \mathbb{Z}[X]$. Atunci din $r(X^2) \mid f(X^2)$ rezultă $r(X) \mid f(X)$, deci $f(X) = \pm r(X)$. În mod evident, avem scrierea unică $g(X) = u(X^2) + Xv(X^2)$ pentru anume polinoame $u, v \in \mathbb{Z}[X]$. Atunci $g(-X) = u(X^2) - Xv(X^2)$, prin urmare şi $s(X) = g(X)g(-X) = u^2(X^2) - X^2v^2(X^2)$, de unde finalmente $f(X) = \pm r(X) = \pm(u^2(X) - Xv^2(X))$. □

Remarcă. Dacă $f(X) = \pm(u^2(X) - Xv^2(X))$, atunci putem scrie şi relaţia $f(X^2) = \pm(u^2(X^2) - X^2v^2(X^2)) = \pm(u(X^2) - Xv(X^2))(u(X^2) + Xv(X^2))$, deci $f(X^2)$ reductibil (evident fiecare factor este de grad mai mare decât 0); aşadar condiţia este şi suficientă.

Soluţia oficială se complică (în mod inutil), probabil din intenţia de a demonstra "local" lema lui Gauss, în loc de a o invoca. Chiar şi simplul fapt că rolul eminent pe care această lemă îl joacă în problema de faţă, ca şi în general în teoria polinoamelor, nu este subliniat în soluţia oficială, este o omisiune gravă.

Oricum, problema este tehnică, şi nu chiar potrivită pentru un astfel de test – dezavantajând elevii claselor mai mici, şi departe de tipul de probleme întâlnite de obicei în competiţiile internaţionale.

Subiectul (4)**.** *Fie n un număr natural nenul. Un* ***arbore Steiner*** *asociat unei mulţimi finite S de puncte în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$ este o mulţime finită T de segmente în $\mathbb{R}^n$, astfel încât oricare două puncte din S sunt unite printr-un drum unic în T; lungimea lui T este suma lungimilor segmentelor sale. Arătaţi că există un arbore Steiner de lungime $1 + (2^{n-1} - 1)\sqrt{3}$, asociat mulţimii vârfurilor unui n-cub unitate.*

Soluţie. În cele ce urmează, reproduc soluţia oficială, augmentată cu unele clarificări şi motivaţii. Descriem o procedură recursivă pentru construirea unui astfel de arbore Steiner. Cazul $n = 1$ este segmentul unitate, de lungime $1 = 1 + (2^{1-1} - 1)\sqrt{3}$. Cazul $n = 2$, tratat de însuşi Steiner, poate fi descris pentru pătratul $O(0,0)A(1,0)B(1,1)C(0,1)$ şi punctele Steiner $S_1(\sqrt{3}/6, 1/2)$ şi $S_2(1 - \sqrt{3}/6, 1/2)$, de arborele dat de segmentele OS_1, CS_1, AS_2, BS_2, S_1S_2, de lungime $4\sqrt{3}/3 + (1 - 2\sqrt{3}/6) = 1 + (2^{2-1} - 1)\sqrt{3}$. Remarcăm că unghiurile în jurul punctelor Steiner S_1 şi S_2 sunt de $120°$, ca pentru punctul Fermat-Torricelli, şi acest lucru nu este întâmplător. Aceasta ne poate trimite la ideea procedurii care urmează. În trecerea de la $n \geq 1$ la $n + 1$, numărul punctelor Steiner creşte cu 2^n, ajungând la un total de $2(2^n - 1)$, cu unghiurile în jurul lor întotdeauna de $120°$.

Presupunem că un arbore Steiner asociat cu vârfurile n-cubului unitate, de lungime $1 + (2^{n-1} - 1)\sqrt{3}$, există astfel încât fiecare vârf al n-cubului este capăt al unui (şi unuia singur) segment, de lungime $\sqrt{3}/3$. Considerăm acum un $(n+1)$-cub unitate. Alegem o pereche de feţe opuse (care vor fi n-cuburi unitate) şi considerăm n-cubul unitate ale cărui vârfuri sunt date de mijloacele muchiilor care conectează vârfurile corespunzătoare ale acestor feţe. Pentru arborele Steiner asociat cu vârfurile acestui n-cub unitate, pentru fiecare vârf v al acestuia, ştergem un segment de lungime $\sqrt{3}/6$ de la capătul v al segmentului, creând un nou punct Steiner, iar apoi adăugăm segmentele care unesc acest nou punct cu cele două vârfuri ale $(n+1)$-cubului pentru care v este mijloc de muchie. Din teorema lui Pitagora, aceste segmente vor avea fiecare lungimea $\sqrt{3}/3$. Efectul acestor schimbări este adunarea unei lungimi totale de $2^n(2\sqrt{3}/3 - \sqrt{3}/6) = 2^{n-1}\sqrt{3}$ la lungimea arborelui, care deci devine $(1+(2^{n-1}-1)\sqrt{3})+2^{n-1}\sqrt{3} = 1+(2^n-1)\sqrt{3}$. Dar acesta este un arbore Steiner asociat cu vârfurile $(n+1)$-cubului unitate, care în plus are şi proprietatea cerută pentru inducţie, anume ca fiecare vârf al său să fie capăt al unui (şi unuia singur) segment, de lungime $\sqrt{3}/3$. □

Remarcă. De obicei spaţiul euclidian de dimensiune n se notează cu $\mathbb{E}^n$, tocmai pentru a-l diferenţia de spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$. Există o bogată literatură consacrată arborilor Steiner; vezi de exemplu

`http://en.wikipedia.org/wiki/Steiner_tree_problem`

Se vede mai sus cum cunoaşterea arborelui Steiner pentru $n = 2$ poate sugera calea de urmat; fără această motivaţie, procedura este mai mult sau mai puţin artificială, şi aproape imposibil de găsit.

Ca şi (dacă nu chiar mai mult ca) anul trecut, rezultatele Testului Seniori IMAR nu cred că sunt deloc concludente, din cauza problemelor alese în mod nejudicios. Au participat 34 de concurenţi. Subiectele (mai puţin primul) au creat mari probleme participanţilor, după cum se vede mai jos. Scorul cel mai mare a fost 15 din 28 posibile. Mediile de puncte pe probleme au fost respectiv 3.50, 0.00(!), 0.68, 0.15 din 7, cu media de total 4.32 din 28.

Subiect/Puncte	$7-6$	$5-4$	$3-2$	$1-0$
1	18	1	0	15
2	0	0	0	34
3	4	1	1	28
4	0	0	2	32

Rezultate – aş zice – jalnice. Au fost doar patru scoruri de peste 10 din 28, şi treisprezece scoruri de 1 şi 0. De mult n-am mai văzut astfel de rezultate (de anul trecut, ibidem!) – îmbătrânesc ... *o tempora o mores.*

---

2. Clasa a VI-a

Subiectul (1)**.** *Se consideră mulţimea* $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Submulţimile A, B *şi* C *ale mulţimii* X *au proprietăţile:*

i) $A \cup B \cup C = X$ *şi*

ii) $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$.

Arătaţi că cel puţin una dintre submulţimile A, B *sau* C *are produsul elementelor sale mai mare sau egal cu* 72.

Soluţie. Produsul elementelor mulţimii X este $9! = 362880$. Printr-un simplu argument de medie, măcar una dintre submulţimile A, B sau C are produsul elementelor sale mai mare sau egal cu $\left\lceil \sqrt[3]{362880} \right\rceil = 72$.

Un exemplu (ne-cerut în enunţ, dar interesant), care arată că 72 este optim, poate fi $A = \{2, 5, 7\}$, $B = \{3, 4, 6\}$, $C = \{1, 8, 9\}$. $\square$

Remarcă. Soluţia oficială este o calificată ruşine. Din motive necunoscute (foarte probabil o eroare de calcul a lui $71^3 = 357911 < 362880$, crezând că de fapt $71^3 > 362880$), soluţia calculează $70^3 = 343000 < 362880$, de unde măcar o submulţime cu produs mai mare sau egal cu 71. Dar 71 nu poate fi, căci 71 nu divide 9! (şi se mai dau şi 3 puncte în barem pentru aceasta!), deci măcar o submulţime are produsul elementelor mai mare sau egal cu 72.[4]

Iar modelul oferit acolo este $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$, susţinând că produsele elementelor sunt în ordine crescătoare, dar $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ este (mult) mai mare decât 72. Modelul acesta (eronat) este şi încorporat în barem; sper că n-a fost penalizată lipsa unui model, căci nu era cerut.

Subiectul (2)**.** *Numărul* $m = \overline{abc}$ *este scris cu cifre nenule distincte şi are suma cifrelor egală cu* S. *Determinaţi valorile lui* S *pentru care suma cifrelor numărului* $n = 1110 - \overline{abc}$ *se divide cu* S.

Soluţie. Avem $1 + 2 + 3 = 6 \leq S = a + b + c \leq 24 = 7 + 8 + 9$. Deoarece evident $n = \overline{(10-a)(10-b)(10-c)}$, suma cifrelor sale este $30 - S$. Trebuie deci $S \mid 30 - S$, prin urmare $S \mid 30$, şi singurele astfel de numere între 6 şi 24 sunt date de $S \in \{6, 10, 15\}$. $\square$

Remarcă. Din motive necunoscute, soluţia oficială menţionează şi inutila inegalitate $6 \leq 30 - (a + b + c) \leq 24$. În mod ciudat, baremul oferă doar 3 puncte pentru această problemă; evident ceva lipseşte ... (cred că ştiu ce).

Subiectul (3)**.** *Se consideră un număr natural* n, $n \geq 1$. *Pe o tablă sunt scrise numerele* $1, 2, 3, \ldots, 3n + 2$.

Doi jucători, A şi B, şterg alternativ, începând cu A, câte trei numere de pe tablă. Dacă ultimele două numere rămase pe tablă sunt consecutive, atunci câştigă jucătorul care a şters ultimele trei numere.

a) Reuşeşte jucătorul B să câştige dacă $n = 2014$*? Justificaţi răspunsul.*

b) Reuşeşte jucătorul A să câştige dacă $n = 2015$*? Justificaţi răspunsul.*

[4] Problema a fost deja folosită, într-o variantă echivalentă, în concursul ViitoriOlimpici de anul trecut, ca Problema 2, Etapa 5, clasa a V-a, cu soluţia "normală"; se pare că n-a slujit la mare lucru, dată fiind prestaţia de aici.

Soluţie. Dacă n este par, jucătorul B ia în consideraţie perechile de numere consecutive $\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{3n+1,3n+2\}$. După fiecare mutare a lui A, B şterge trei numere, astfel ca să rămână exact cu trei mai puţine perechi complete, şi în final câştigă. Dacă n este impar, jucătorul A şterge numerele $\{3n,3n+1,3n+2\}$, şi foloseşte apoi strategia de mai sus (metoda strategiei "împrumutată") pentru a câştiga. □

Subiectul (4)**.** *Se consideră numerele naturale a şi b. Se construieşte şirul $a_1,a_2,a_3,\ldots$ astfel: prin $a_1=a$, $a_2=b$, iar, pentru oricare $n\geq 3$, a_n este egal cu restul împărţirii numărului $a_{n-1}+a_{n-2}$ la 5. Dacă $a=6$ şi $b=8$, calculaţi suma primilor 802 termeni ai şirului.*

Soluţie. Relaţia de recurenţă a şirului este cea a şirului Fibonacci (doar primii doi termeni sunt alţii); or, orice astfel de şir este periodic modulo orice număr m. Generalitatea a, b, este inutilă, din moment ce se lucrează cu valorile lor particulare. De fapt, în întreaga generalitate, formula termenului general este $a_n=aF_{n-2}+bF_{n-1}$, unde $F_{-1},F_0,F_1,F_2,F_3,F_4,F_5\ldots=1,0,1,1,2,3,5,\ldots$ Modulo 5 şirul ia valorile $(a_3,a_4,a_5,a_6),(a_7\ldots=(4,2,1,3),(4,\ldots$, ceea ce conduce la suma $6+8+10\cdot 200=2014$ (şi aceasta explică alegerea ciudată a valorilor $a=6$, $b=8$; ha ha.). □

3. Clasa a VII-a

Subiectul (1)**.** *Arătaţi că, dacă numerele a, b, a^2+b şi $a+b^2$ sunt prime, atunci şi numerele $a+b$ şi a^2+b^2 sunt prime.*

Lucian Petrescu

Soluţie. Deoarece a^2+b este prim, trebuie (din considerente de paritate) ca unul dintre a şi b să fie egal cu 2. Deoarece avem simetrie completă între a şi b, lucrăm cu $a=2$. Dar atunci, deoarece $2+b^2$ este prim, trebuie $b=3$. Aşa încât concluzia este anticlimactică; odată ce cunoaştem $(a,b)=(2,3)$, rămâne să verificăm că $2^2+3=7$, $2+3^2=11$, $2+3=5$ şi $2^2+3^2=13$ sunt prime. □

Subiectul (2)**.** *Numerele întregi distincte a, b, şi c verifică egalitatea*

$$a+b+c=(a-b)(b-c)(c-a).$$

Determinaţi cea mai mică valoare a numărului $|a+b+c|$.

selectată de Cristian Mangra

Soluţie. Fie $a-b=x\neq 0$, $b-c=y\neq 0$, deci $c-a=-(x+y)\neq 0$, $b=y+c$ şi $a=x+y+c$. Egalitatea dată devine $x+2y+3c=-xy(x+y)$, sau $xy(x+y)+x+2y=-3c$. Dacă nici x nici y nu se divid prin 3, atunci $xy(x+y)+x+2y=x^2y+xy^2+x+2y\equiv y+x+x+2y\equiv 2x\not\equiv 0 \pmod 3$, absurd. Prin urmare x sau y se divide prin 3, ceea ce forţează ca şi celălalt să se dividă prin 3, aşadar $x=3u$, $y=3v$, şi atunci $-xy(x+y)=-27uv(u+v)$. Dar $u\neq 0$, $v\neq 0$, $u+v\neq 0$, şi deci

$$|a+b+c|=|-xy(x+y)|=27|uv(u+v)|\geq 27\cdot 2=54.$$

Egalitate se obţine pentru $(u,v) \in \{\pm(1,1), \pm(1,-2), \pm(2,-1)\}$, conducând la singurele posibilităţi $(a,b,c) \in \{\pm(15,18,21), \pm(18,21,15), \pm(21,15,18)\}$. Valoarea minimă 54 se obţine deci pentru doar şase triplete. $\square$

Remarcă. Soluţia oficială procedează altfel, introducând în *deus ex machina* ideea congruenţelor modulo 3, idee care în soluţia de mai sus este forţată asupra rezolvitorului. Mai mult, metoda de mai sus permite în mod imediat şi găsirea unui model minimal (necesar pentru a conclude) – şi chiar a tuturor modelelor minimale. Această metodă are de fapt şi un nume aparte, cunoscut specialiştilor în inegalităţi, anume "Buffalo Way".

Rezultatele la această problemă au fost neaşteptat de slabe, mai ales pentru o Problemă 2; o medie de 0.37 puncte din 7 posibile. Pun aceasta pe seama inocenţei şi lipsei de experienţă a concurenţilor, dar experimentaţii şi veteranii selecţioneri ai problemelor ar fi trebuit să realizeze pericolul, şi să "promoveze" problema pe poziţia 4, în locul celei folosite – o simpluţă problemă de geometrie, la care s-a obţinut cel mai mare punctaj general, chiar mai mare decât cel de la Problema 1.

Subiectul (3)**.** *Fie numerele raţionale pozitive şi distincte* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{31}$. *Dacă*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{31}} > 5,$$

arătaţi că există $1 \leq i \leq 31$ *pentru care* $a_i \notin \mathbb{N}^*$.

MIRCEA FIANU

Soluţie. Fără a intra în banale amănunte, soluţia presupune toate numerele a fi naturale nenule; atunci

$$S = \sum_{k=1}^{31} \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{31} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{3} \frac{1}{k} + \sum_{k=4}^{7} \frac{1}{k} + \sum_{k=8}^{15} \frac{1}{k} + \sum_{k=16}^{31} \frac{1}{k},$$

dar $\displaystyle\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k} < \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{2^m} = 1$, deci $S < 5$, contradicţie. $\square$

Remarcă. Soluţia oficială conţine benigna eroare $\dfrac{1}{17} + \dfrac{1}{18} + \cdots + \dfrac{1}{31}$ pentru ultima sumă parţială, în loc de corecta $\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{17} + \cdots + \dfrac{1}{31}$.

Numărul 31 este prea mic (mai bine 1023, cu minorant 10); nu este de băut un ocean pentru a calcula exact $\displaystyle\sum_{k=1}^{31} \frac{1}{k} = \frac{290774257297357}{72201776446800} \approx 4.03 < 5$, şi toată ideea grupării în sume parţiale se duce pe apa Sâmbetei ... care grupare este arhicunoscută, similară cu cea folosită în demonstrarea faptului că seria armonică este divergentă, ceea ce face că problema nu ar fi trebuit a fi semnată.

4. Clasa a VIII-a

Subiectul (1).

i) Demonstraţi că $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1} < 2x\sqrt{x}$ *pentru orice număr real* $x \geq 1$.

ii) Demonstraţi că, dacă a *şi* b *sunt numere reale pentru care există un număr real* $x \geq 1$, *astfel încât*

$$\sqrt{a+\sqrt{x+1}}+\sqrt{b+\sqrt{x-1}} \geq \sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{b+\sqrt{x}},$$

atunci $a < b$.

Traian Preda

Soluţie.

i) Trivial, căci $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$ $= \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} < 0$. Nu am la dispoziţie decât soluţiile postate, aşa încât nu ştiu dacă pe foile de concurs eroarea $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1} < 2x$ a fost perpetuată. Desigur, inegalitatea aceasta rămâne adevărată pentru $x \geq 1$, dar nu mai slujeşte la nimic către punctul următor.

ii) Inegalitatea dată se scrie

$$\sqrt{a+\sqrt{x+1}}-\sqrt{a+\sqrt{x}} \geq \sqrt{b+\sqrt{x}}-\sqrt{b+\sqrt{x-1}}.$$

Funcţia

$$f(t,x) = \sqrt{t+\sqrt{x+1}}-\sqrt{t+\sqrt{x}} = \frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{t+\sqrt{x+1}}+\sqrt{t+\sqrt{x}})}$$

este evident descrescătoare, atât în t cât şi în x. Avem prin urmare, din inegalitatea dată combinată cu monotonia lui f, că $f(a,x) \geq f(b,x-1) > f(b,x)$, ceea ce forţează $a < b$. Această soluţie, mai simplă şi directă decât cea oficială, refuză să se prevaleze de rezultatul de la punctul anterior, pe care îl trimite la coşul de gunoi al istoriei. □

Remarcă. Soluţia oficială acţionează prin ridicări la pătrat, folosind pe parcurs "cârja" enunţată la punctul i), pentru a ajunge prin calcule opace la concluzie. Poate este momentul ca autorii problemelor să folosească şi ei înşişi metodele pe care le predau copiilor, în speţă "raţionalizarea expresiilor cu radicali". Se observă şi că se putea lucra cu orice $\varepsilon > 0$ în loc de 1.

Subiectul (4).

i) Se consideră numerele reale a, b, c, *astfel încât* $0 < a < b$ *şi* $c \geq 0$. *Demonstraţi că* $\dfrac{a+c}{b+c} \geq \dfrac{a}{b}$.

ii) Dacă x, y *şi* z *sunt numere reale nenegative astfel încât* $x+y+z = \dfrac{1}{3}$, *arătaţi că* $\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1-y}{1+y}\cdot\dfrac{1-z}{1+z} \geq \dfrac{1}{2}$.

selectată de Cristian Mangra

Soluţie.

i) Trivial echivalent cu $(b-a)c \geq 0$. Un astfel de punct, ajutător (cică) pentru punctul următor, este de obicei numit de mine o "cârjă". Dar efectul este deseori pernicios, punctul următor putând fi rezolvat printr-o metodă directă mai simplă.

ii) Soluţia oficială foloseşte punctul i) astfel

$$\frac{1-p}{1+p} \cdot \frac{1-q}{1+q} = \frac{(1-(p+q))+pq}{(1+(p+q))+pq} \geq \frac{1-(p+q)}{1+(p+q)},$$

sub condiţii rezonabile asupra lui p, q.[5] Prin aplicarea iterată a acestei inegalităţi se obţine rezultatul cerut, ceea ce ar fi fost justificat dacă se lucra cu n variabile reale nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$, când

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1-x_k}{1+x_k} \geq \frac{1-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{1+\sum\limits_{k=1}^{n} x_k} = \frac{1-s}{1+s},$$

cu egalitate doar când toate variabilele – mai puţin una – sunt nule.

În cazul nostru, cu $n=3$ şi $x+y+z=\dfrac{1}{3}$, putem însă scrie

$$\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{1-z}{1+z} - \frac{1}{2} = \frac{\sum xy - 3xyz}{2(1+\sum x + \sum xy + xyz)}.$$

Dar $xyz \leq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 < 1$, şi putem acum scrie $\sum xy \geq 3(xyz)^{2/3} \geq 3xyz$, cu egalitate doar când două dintre variabile sunt nule. $\square$

5. Clasa a IX-a

Subiectul (3)**.** *La un club de tenis de masă sunt* 12 *membri, care joacă doar între ei. Fiecare membru a jucat cel puţin un meci şi are, la fiecare moment, un număr de puncte egal cu raportul dintre numărul de meciuri câştigate şi numărul de meciuri jucate până atunci.*

a) Calculaţi suma punctajelor membrilor clubului, dacă la momentul calculării punctajului fiecare jucase acelaşi număr de meciuri.

b) Arătaţi că, indiferent de numărul meciurilor jucate de fiecare membru, suma punctajelor membrilor clubului la un anumit moment nu este mai mică decât 1 *şi nici mai mare decât* 11*.*

Soluţie. Graful orientat $\overrightarrow{G}$ al situaţiei la momentul calculării punctajelor are ca mulţime V a vârfurilor pe cei 12 jucători, şi muchii orientate $\overrightarrow{xy}$ dinspre jucătorul câştigător x către cel pierzător y, pentru fiecare meci jucat. Notăm cu $\deg^+ x$ şi $\deg^- x$ gradele de ieşire, respectiv intrare, din graful $\overrightarrow{G}$ pentru jucătorul x, şi cu $p(x)$ punctajul lui x la acel moment. Ni se spune că $\deg^+ x + \deg^- x \geq 1$, şi de asemenea că $p(x) = \dfrac{\deg^+ x}{\deg^+ x + \deg^- x}$, pentru fiecare $x \in V$. Fie în general $|V| = n$.

[5] Dar după cum se vede, trebuia de fapt la punctul i) să se specifice $0 < a \leq b$ în loc de $0 < a < b$, căci se poate întâmpla ca $b = a$ pe parcursul iteraţiei.

a) Fie $m = \deg^+ x + \deg^- x$ numărul acelaşi de meciuri jucate la momentul calculării punctajelor de către fiecare jucător (deci constant în $x \in V$). Atunci suma punctajelor este

$$\sum_{x\in V} p(x) = \sum_{x\in V} \frac{\deg^+ x}{\deg^+ x + \deg^- x} = \frac{1}{m}\sum_{x\in V} \deg^+ x = \frac{|V|m}{2m} = \frac{n}{2},$$

căci evident (unul dintre cele mai elementare rezultate din teoria grafurilor), printr-o simplă dublă numărare, $\sum_{x\in V} \deg^+ x = \sum_{x\in V} \deg^- x = \frac{|V|m}{2} = \frac{nm}{2}$.

b) Ni se cere să arătăm că $1 \le \sum_{x\in V} p(x) \le n-1$. Pentru a obţine o simplificare a expresiilor şi calculelor, vom indexa jucătorii $x_1, x_2, \ldots, x_n$, şi apoi vom putea nota $w_i = \deg^+ x_i$ şi $\ell_i = \deg^- x_i$, pentru $1 \le i \le n$. Avem atunci, din "versiunea Titu" a inegalităţii Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{x\in V} p(x) = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{w_i+\ell_i} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{w_i^2 + w_i\ell_i} \ge \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n w_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^n (w_i^2 + w_i\ell_i)}.$$

Dar $\left(\sum\limits_{i=1}^n w_i\right)^2 - \sum\limits_{i=1}^n (w_i^2 + w_i\ell_i) = \sum\limits_{1\le i\ne j\le n} w_iw_j - \sum\limits_{i=1}^n w_i\ell_i = \sum\limits_{i=1}^n w_i\left(\sum\limits_{j\ne i} w_j - \ell_i\right) \ge 0,$

căci un jucător x_i nu poate pierde mai multe meciuri ℓ_i decât numărul total $\sum\limits_{j\ne i} w_j$ al meciurilor câştigate de ceilalţi. Aceasta înseamnă însă precis $\sum\limits_{x\in V} p(x) \ge 1$.

Cealaltă inegalitate provine din chiar aceasta, aplicată în graful $\overrightarrow{G'}$ unde am inversat orientarea muchiilor. Avem acolo $w'_i = \ell_i$, $\ell'_i = w_i$, şi $p'(x_i) = 1 - p(x_i)$, pentru fiecare $1 \le i \le n$. Prin urmare

$$\sum_{x\in V} p(x) = \sum_{x\in V}(1 - p'(x)) = |V| - \sum_{x\in V} p'(x) \le n - 1.$$

Aceste limite pot fi atinse, de exemplu cu $w_i = 0$, $1 \le i < n$, dar $w_n = n-1$, etc. □

Remarcă. De ce $n = 12$? Numărul jucătorilor nu are nicio relevanţă. Mă face doar să-mi amintesc de cei 12 apostoli, şi un gând pios este întotdeauna binevenit ☺

6. Clasa a X-a

Subiectul (1)**.** *Determinaţi numerele naturale $n \ge 2$ pentru care există numărul cu n cifre $\overline{x_1x_2\ldots x_n}$ astfel încât*

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{x_1x_2\ldots x_n}} + n} = \overline{0,x_1x_2\ldots x_n}.$$

Soluţie. Notând $x = \overline{x_1x_2\ldots x_n}$, relaţia devine $x(\sqrt[n]{x} + n) = 10^n$, de unde rezultă $\sqrt[n]{x} = \frac{10^n - nx}{x} \in \mathbb{Q}$. Dar pentru $\sqrt[n]{x} = \frac{p}{q}$, cu $\mathrm{c.m.m.d.c.}(p,q) = 1$, vom avea $q^n x = p^n$, deci $q \mid p^n$, ceea ce forţează $q = 1$, şi deci $x = p^n$, cu $p \in \mathbb{N}^*$. Din $p^n(p+n) = 10^n$ rezultă acum $p \mid 10$, $p < 10$.

• $p = 1$ nu convine, căci atunci $x = 1$, absurd;

• $p = 2$ nu convine, căci atunci $2 + n = 5^n$, absurd, căci $2 + n < 5^n$ pentru $n \geq 1$;

• $p = 5$ conduce la $5 + n = 2^n$, şi $5 + n < 2^n$ pentru $n \geq 4$, de unde singura valoare posibilă este $n = 3$ (pentru care $x = 5^3 = 125$). □

Remarcă. O omisiune într-adevăr minoră, dar totuşi o omisiune, constă în lipsa considerării cazului $p = 1$ în soluţia oficială.

Subiectul (3)**.** *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *numere reale din intervalul* $[0, 1]$*. Arătaţi că există* $x \in [0, 1]$ *astfel încât*

$$2(|x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|) = n.$$

Soluţie. Funcţia $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ dată prin $f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - x_k|$ este continuă, cu $f(0) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ şi $f(1) = n - \sum_{k=1}^{n} x_k$. Prin urmare va exista atunci $x \in [0, 1]$ astfel ca $f(x) = \dfrac{f(0) + f(1)}{2} = \dfrac{n}{2}$, din proprietatea valorii intermediare. □

Remarcă. Desigur, soluţia oficială obţine faptul că $f([0, 1])$ este un interval prin metode specifice de algebră, potrivite clasei a X-a, şi nu de analiză matematică, stabilind cu uşurinţă că f este "liniară pe porţiuni" (şi cu imaginea conectată).

Rezultatele la această problemă au fost neaşteptat de slabe, cu o medie de 0.38 puncte din 7 posibile. Este surprinzător (căci aceste sume de moduli sunt destul de des folosite şi ar trebui a fi bine cunoscute),[6] şi prin aceasta îngrijorător.

7. Clasele a XI-a şi a XII-a

Subiectul (1)**.** *Determinaţi cel mai mare termen al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, definit prin*

$$x_n = \frac{1}{2^n} C^n_{n+2104}.$$

Soluţie. Avem $x_n = \dfrac{(n+N)!}{2^n n! N!} \leq \dfrac{(n+1+N)!}{2^{n+1}(n+1)! N!} = x_{n+1}$ dacă şi numai dacă avem $2(n + 1) \leq n + 1 + N$, adică $n \leq N - 1$, cu egalitate pentru $n = N - 1$. Prin urmare şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este unimodular, cu termenii de valoare maximă $x_{N-1} = x_N$ (de notat că enunţul cere **termenul** de valoare maximă, şi nu **valoarea** maximă, şi ca atare este lejermente neglijent exprimat, căci sunt doi termeni consecutivi cu valoare egală, maximă). □

Remarcă. Nu am inclus această problemă banală decât pentru "gluma" $N = 2104$, şi nu $N = 2014$ ☺ Oare câţi dintre concurenţi au avut o benignă "scăpare" şi au lucrat cu valoarea corespunzătoare anului curent? Am un număr de trei ipoteze asupra provenienţei lui 2104 ...

Subiectul (2)**.** *Pentru fiecare număr natural nenul* n *notăm* cu $d(n)$ *cel mai mic număr natural nenul care nu divide pe* n*. Arătaţi că şirul* $(d(d(n)))_{n\geq 1}$ *este mărginit.*

[6] De exemplu, este uşor de văzut că funcţia f este descrescătoare până ce x atinge valorile $x_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}, x_{\lceil (n+1)/2 \rceil}$, iar apoi devine crescătoare. Din câte încerc să-mi amintesc, un număr de probleme de acest tip au fost folosite în ultimii ani la Olimpiada de Matematică sau alte concursuri.

Soluţie. Un patent "understatement"; de fapt $d(d(n)) \in \{2,3\}$ pentru orice $n \geq 1$.

Din definiţia lui $d(n)$ se impune $\text{c.m.m.m.c.}[1,2,3,\ldots,d(n)-1] \mid n$, dar $\text{c.m.m.m.c.}[1,2,3,\ldots,d(n)-1,d(n)] \nmid n$. E notoriu faptul că şirul $(x_m)_{m\geq 1}$ dat prin $x_m = \text{c.m.m.m.c.}[1,2,3,\ldots,m]$ este crescător, dar în cea mai mare parte constant, având o creştere doar pentru $m = p^k$, $k \geq 1$, o putere a unui număr prim. Prin urmare $d(n)$ este indicele minim m al unui termen $x_m \nmid n$, aşadar este de forma $d(n) = p^k$. Acum, dacă $p > 2$ atunci $d(n)$ este impar, deci $d(d(n)) = 2$, iar dacă $p = 2$ atunci $d(d(n)) = 3$. $\square$

Remarcă. Dintr-o necaracteristică scăpare, soluţia oficială conclude în mod abuziv că pentru n par, $d(n)$ trebuie a fi o putere a unui număr prim **impar**, deşi se vede în cele de mai sus că $d(n)$ poate fi chiar orice putere a lui 2, de exemplu pentru $n = \text{c.m.m.m.c.}[1,2,3,\ldots,2^k-1]$.

Problema este de fapt o "făcătură" pentru clasele mari, neavând în comun cu materia specifică acestor clase decât conceptul de mărginire a unui şir (şi acesta abuzat în anume sens).

Subiectul (4)**.** *Punctele unui cerc se colorează arbitrar cu roşu şi albastru.*

a) Arătaţi că putem găsi trei puncte pe cerc, de aceeaşi culoare, care sunt vârfurile unui triunghi isoscel.

b) Arătaţi că putem găsi patru puncte pe cerc, de aceeaşi culoare, care sunt vârfurile unui trapez isoscel.

Soluţie. Lucrând cu cercul de rază 1 şi centrul în origine, vom considera vârfurile unui pentagon regulat Π_θ având unul dintre vârfuri de coordonate $(\cos\theta, \sin\theta)$.

a) Toate triunghiurile determinate de vârfurile unui pentagon regulat Π_θ sunt isoscele; dintre cinci puncte, trei vor avea aceeaşi culoare.

Desigur, nu există întotdeauna un triunghi echilateral monocolor; pentru a dovedi acest lucru este suficient să partiţionăm cercul în triplete formate din vârfuri de triunghiuri echilaterale, şi în fiecare triplet să colorăm arbitrar două dintre vârfuri cu o culoare şi al treilea cu cealaltă culoare.

Pe de altă parte, pentru orice număr r de culori folosite, va exista un triunghi isoscel monocolor. Pentru aceasta, considerăm punctele de coordonate $(\cos\theta_n, \sin\theta_n)$ cu $\theta_n = \dfrac{2n\pi}{W(r,3)}$, $n = 1,2,\ldots,W(r,3)$, unde $W(r,k)$ este numărul lui Van der Waerden, cel mai mic număr N pentru care, colorând numerele $\{1,2,\ldots,N\}$ cu r culori, există printre ele o progresie aritmetică monocoloră cu k termeni.

b) Este înduioşătoare folosirea expresiei trapez isoscel, de parcă un trapez inscriptibil poate fi şi altfel decât isoscel. Există o pereche P_θ de vârfuri consecutive de aceeaşi culoare printre cele ale unui pentagon Π_θ. Aplicăm această alegere pentru trei pentagoane Π_{θ_k}, $1 \leq k \leq 3$, care două câte două nu au vârfuri în comun sau diametral opuse (putem lucra de fapt cu orice alt număr impar de laturi decât 5). Vor fi două perechi P_{θ_i} şi P_{θ_j}, cu $1 \leq i < j \leq 3$, ale căror patru elemente au toate aceeaşi culoare, şi oricum ar fi acestea dispuse, ele sunt vârfurile unui trapez. Punctajele obţinute arată că probabil nimeni n-a rezolvat acest punct.

Dintr-o comunicare personală a lui Andrei Eckstein aflu despre o problemă care cerea să se arate că dacă alegem oricare 7 dintre vârfurile unui poligon regulat cu 27 de laturi, atunci printre ele se află vârfurile unui trapez; aceasta permite extinderea punctului b) la o colorare cu patru culori. Sursa este KöMaL, care trimite la o competiţie din 2012 în Germania.

Dar aceeaşi observaţie ca la punctul a) rezolvă şi acest punct b) pentru r culori. Nu trebuie decât să lucrăm cu numărul lui Van der Waerden $W(r, 4)$. □

Remarcă. Soluţia oficială a punctului b) este extrem de complicată; aproape că aş putea ghici originea ei,[7] asemănătoare cu multe de acelaşi tip dintr-o binecunoscută carte de probleme de geometrie combinatorică ☺

Foarte puţini participanţi (11) la clasa a XII-a, şi cu rezultate mai slabe decât cei de la clasa a XI-a, care în general au avut cele mai bune rezultate la liceu. Subiectele clasei a IX-a par a fi fost cele mai uşoare.

---

8. Încheiere

Un amănunt caraghios ☺. Pagina site-ului SSMR dedicată concursului anunţă

> La proba tip O.I.M. pot participa elevii care doresc să intre în componenţa loturilor olimpice pentru concursurile internaţionale din anul **2014**.

Mai greu aceasta (în engleză, "a tall order"), în afară de cazul că ne putem întoarce în timp ... ceea ce nu ar fi neapărat foarte rău. Dar *maşina timpului* n-a inventat-o decât H. G. Wells. (De altfel, anul trecut anunţul făcea referinţă la **2013**, iar anţărţ la **2012**, deci eroarea se repercutează, deşi acesta este al treilea an când o semnalez). Iar semnul "achtung!" care precede soluţiile şi rezultatele ediţiei **2014** continuă să trimită printr-un hyperlink (ca şi anul trecut) la anunţul premiilor oferite de eMAG hăt, în anul **2012**.

Am mai spus eu şi cu alte ocazii că bunele obiceiuri se instalează rar, şi sunt şi mai rar susţinute. Subiectele şi soluţiile probelor pe clase, care apăreau anul trecut în timp util, acum au apărut târziu înspre noapte. Doar subiectele şi soluţiile Testului IMAR au apărut scurt timp după încheierea concursului, iar rezultatele complete au apărut spre seară, sortate însă în ordine alfabetică, şi nu în ordinea – mult mai interesantă – a punctajelor, iar faptul că fişierele sunt `.pdf` şi nu `.xls` nu permite re-sortarea. Mai mult, premiile/medaliile nu sunt menţionate defel.

Exista, în trecut, bunul obicei ca una dintre problemele fiecărei clase să fi fost o creaţie a regretatului Bebe Panaitopol, în memoria căruia a fost numit concursul; poate că este încă şi acum cazul, dar numele autorilor nu sunt prezente în materialul cu soluţiile oficiale pentru clasele de liceu.

Subiectele au fost de un grad în general redus de dificultate (mai ales la gimnaziu), ceea ce a dus la punctaje relativ mari. Problemele n-au avut în general un conţinut atrăgător, unele dintre ele fiind chiar stângace. Subiectele de liceu sunt mai relevante, dar am văzut şi ani trecuţi de o calitate mai înaltă. Din păcate cantitatea de greşeli la probele pe clase, atât în enunţuri cât şi în soluţii, este nerezonabil de mare, dincolo de ceea ce în mod normal ar fi prea mult chiar pentru un an întreg de concursuri. Testul IMAR îşi are şi el hibele lui, în special legate de alegerea problemelor.

[7] Mi-aduc acum aminte; mi-a fost prezentată această problemă acum câteva luni, drept candidat pentru un concurs, dar am refuzat-o (din motive bine întemeiate, legate de teorema Van der Waerden) – iată că şi-a găsit până la urmă căldura unui cămin!