COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014
ETAPA JUDEŢEANĂ ŞI A MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

Abstract. Comments on some of the problems presented at the 2014 District Round of the National Mathematics Olympiad.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII.
Data: 10 martie 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Etapei Judeţene şi a Municipiului Bucureşti a Olimpiadei de Matematică 2014 reflectă opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Clasa a V-a

Subiectul (1)**.** *Determinaţi numerele de forma* $\overline{abc}$ *care verifică relaţia*

$$b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10.$$

G.M.-B.

Soluţie. Relaţia $b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10$ scriindu-se $b(10a + c) = c(10a + b) + 10$, deci $ba = ca + 1$, vom avea $a(b - c) = 1$, de unde $a = 1$ şi $b = c + 1$. Numerele sunt deci $\boxed{110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198}$.

Probabil că problema dorea doar să verifice dacă se ştie ce înseamnă scrierea în baza 10 dată de $\overline{ab\ldots z}$. Cam subţire ... □

Subiectul (2)**.** *Fie* M *mulţimea numerelor palindrom de forma* $5n + 4$*, unde* $n \in \mathbb{N}$*.* (*Un număr natural se numeşte* ***palindrom*** *dacă este egal cu răsturnatul său. De exemplu, numerele* 7*,* 191*,* 23532*,* 3770773 *sunt numere palindrom. Trebuia dat şi un exemplu cu număr* ***par*** *de cifre, ca* 375573*.*)

a) Dacă scriem în ordine crescătoare elementele mulţimii M*, stabiliţi care este al* 50*-lea număr scris.*

b) Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare dintre elementele mulţimii M *care se scriu cu cifre nenule şi au suma cifrelor* 2014*.*

[1]Lipsesc unele probleme, la care nu am văzut interesul de a fi prezentate. Le găsiţi pe toate (postate în timp record – bravo!), ca şi rezultatele, la `http://ssmr.ro/bareme`.

Soluţie. Numerele din M sunt de forma d, $\overline{dd_1d_2\dots d_kd_k\dots d_2d_1d}$, sau încă $\overline{dd_1d_2\dots d_kd_{k+1}d_k\dots d_2d_1d}$, cu $d \in \{4,9\}$ şi $k \in \mathbb{N}$.

a) Avem deci 2 numere de o cifră, 2 numere de 2 cifre, 20 de numere de 3 cifre, 20 de numere de 4 cifre; în total 44 până acum. Al şaselea număr de 5 cifre este evident $\boxed{40504}$.

b) Pentru a avea un număr mare, trebuie să folosim cât mai multe cifre. Răspunsul este deci $\boxed{4\,\underbrace{11\dots11}_{\text{de 2006 ori}}\,4}$. Pentru a avea un număr mic, trebuie să folosim cât mai puţine cifre. Răspunsul este deci $\boxed{98\,\underbrace{99\dots99}_{\text{de 220 ori}}\,89}$.

Îmi cer scuze pentru prezentarea laconică, dar problema nu-mi place. $\square$

Subiectul (3)**.** *Se consideră mulţimea* $A = \{1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{2014}\}$. *Spunem că se realizează o* ***partiţie*** *a lui* A *dacă mulţimea* A *este scrisă ca o reuniune de submulţimi nevide ale sale, disjuncte două câte două.*

a) Demonstraţi că nu există o partiţie a lui A *astfel încât produsul elementelor fiecărei submulţimi din partiţie să fie pătrat perfect.*

b) Arătaţi că există o partiţie a lui A *astfel încât suma elementelor fiecărei submulţimi din partiţie să fie pătrat perfect.*

Soluţie. a) Produsul elementelor mulţimii A este $3^{0+1+\dots+2014} = 3^{1007\cdot 2015}$, care nu este pătrat perfect. Dacă o astfel de partiţie ar exista, produsul elementelor lui A ar fi egal cu produsul produselor elementelor claselor partiţiei, care ar fi pătrat perfect.

b) Din moment ce $3^{2k} + 3^{2k+1} = \left(2 \cdot 3^k\right)^2$ pentru orice k natural, putem exhiba partiţia dată de dubletoanele $\left\{3^{2k}, 3^{2k+1}\right\}$ pentru $0 \le k \le 1006$ şi singletonul $\left\{3^{2014}\right\}$. Un alt model pare greu (sau chiar imposibil) de dat.

Ar fi fost doar o ţâră mai taxant dacă se **cerea** răspunsul la fiecare întrebare, în loc să fie oferit. $\square$

Subiectul (4)**.** *Un număr natural de* 10 *cifre se numeşte* ***dichisit*** *dacă cifrele sale aparţin mulţimii* $\{1,2,3\}$ *şi oricare două cifre consecutive diferă prin* 1.

a) Arătaţi că un număr dichisit conţine în scrierea sa exact 5 *cifre de* 2.

b) Stabiliţi câte numere dichisite există.

c) Demonstraţi că suma tuturor numerelor dichisite se divide cu 1408.

Soluţie. a) Cifre consecutive au paritate diferită, deci (cum există doar cifra pară 2) cifra 2 apare de exact cinci ori (alternativ).

b) Structura fiind $\overline{2{*}2{*}2{*}2{*}2{*}}$ sau $\overline{{*}2{*}2{*}2{*}2{*}2}$, unde "poziţiile" $*$ sunt ocupate în mod indiscriminat de 1 sau 3, vor exista $2^5 + 2^5 = \boxed{64}$ astfel de numere.

c) Soluţia oficială propune gruparea elegantă a unui număr $\overline{a_1a_2\dots a_{10}}$ cu numărul (diferit) $\overline{(4-a_1)(4-a_2)\dots(4-a_{10})}$, cu suma lor fiind $4 \cdot \dfrac{10^{10}-1}{10-1}$.

Atunci suma tuturor numerelor va fi $2^7 \cdot \dfrac{10^{10}-1}{10-1}$. Avem factorizarea

$10^{10}-1 = (10-1)(10+1)(10^4+10^3+10^2+10+1)(10^4-10^3+10^2-10+1)$

de unde $2^7 \cdot \dfrac{10^{10}-1}{10-1} = 2^7 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091$, iar $\boxed{1408 = 2^7 \cdot 11}$ (aşadar ceilalţi factori sunt irelevanţi, şi nu trebuiau neapărat calculaţi).

Alternativ, suma acestor numere poate fi calculată observând că, pe fiecare din cele 10 poziţii ale celor 64 de numere, cifrele 1 şi 3 apar de 16 ori, iar cifra 2 apare de 32 de ori. Atunci suma totală este

$$(16(1+3)+32\cdot 2)(1+10+\cdots+10^9) = 2^7 \cdot \frac{10^{10}-1}{10-1}.$$

Păi, altfel decât calculând suma tuturor numerelor, cum oare ajungem la divizibilitatea cerută? Iarăşi o întrebare "parţială" ... mai bine se cerea *franş* calcularea sumei. □

3. CLASA A VI-A

Subiectul (1). *Arătaţi că:*

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = 1$;

b) $3^{33} + 4^{33} + 5^{33} < 6^{33}$.

G.M.-B.

Soluţie. Ambele puncte sunt bazate pe foarte cunoscuta şi uşor de verificat egalitate $3^3+4^3+5^3 = 6^3$. Punctul a) este chiar această relaţie, iar punctul b) provine din faptul că $x^{33} < x^3$ pentru orice număr real pozitiv subunitar.

Este caraghioasă folosirea numărului 33. Pe vremea când eram eu copil, circula expresia – la doctor – acesta, cu stetoscopul la ureche, te îndemna "zi treizecişitrei!", ca să te asculte mai bine la plămâni. □

Subiectul (2). *Spunem că mulţimea M de cardinal $n > 0$ are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă elementele sale sunt numere naturale care au exact 4 divizori pozitivi. Notăm cu S_M suma tuturor celor $4n$ divizori pozitivi ai elementelor unei astfel de mulţimi M (suma poate conţine şi termeni care se repetă).*[2]

a) Arătaţi că $A = \{2\cdot 37, 19\cdot 37, 29\cdot 37\}$ are proprietatea $\mathcal{P}$ şi $S_A = 2014$.

b) În cazul în care o mulţime B are proprietatea $\mathcal{P}$ şi $8 \in B$, demonstraţi că $S_B \neq 2014$.

Soluţie. Numerele naturale având exact 4 divizori pozitivi sunt de forma p^3 (cu divizorii $1, p, p^2, p^3$) sau pq (cu divizorii $1, p, q, pq$), cu p, q prime.

a) Aşadar A are proprietatea $\mathcal{P}$, iar suma celor 12 divizori pozitivi ai elementelor sale este $S_A = (1+1+1+2+19+29)(1+37) = 2014$.

[2]Evident, măcar divizorii 1 ai fiecărui număr.

b) Soluţia oficială observă că $1+2+4+8=15$ este număr impar (pentru 8), apoi că $1+p+p^2+p^3=(1+p)(1+p^2)$ este par (pentru p^3, impar), şi în fine că $1+p+q+pq=(1+p)(1+q)$ este par (pentru pq, dat fiind că măcar unul dintre p,q este impar).

Dar atunci (din cauza prezenţei numărului 8, singurul posibil cu suma divizorilor săi pozitivi impară) suma S_B va fi impară, deci diferită de 2014 (of, of, nu prea îmi place, ca de obicei, deghizarea unui rezultat general într-o particularitate irelevantă, dar se pare că fenomenul este endemic).

Trebuie să insist, iarăşi şi iarăşi. Divizorii unui număr pot fi şi negativi. Toate definiţiile din textele de aritmetică menţionează atunci când lucrăm doar cu divizorii **pozitivi**; vezi

`http://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic_function`

Aşa încât, chiar dacă la şcoală sau în clasă acest ”amănunt” este (în mod greşit) omis, ar trebui să facem acest (minim) efort, de claritate şi precizie. Nu de alta, dar deprinderile bune trebuie căpătate din timp. □

Subiectul (4)**.** *Determinaţi numerele naturale* a *pentru care există exact* 2014 *numere naturale* b *care verifică relaţia* $2 \leq \dfrac{a}{b} \leq 5$.

Soluţie. Relaţia se scrie $2a \leq 10b \leq 5a$, deci trebuie găsite numerele naturale a pentru care în intervalul $[2a, 5a]$ se află exact 2014 multipli de 10. Prin urmare trebuie să avem $\left\lfloor \dfrac{5a}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{2a-1}{10} \right\rfloor = 2014$. Verifică doar numerele $\boxed{6710, 6712, 6713}$.

Punctajele obţinute aici (doi de 7, câte un 6 şi 5) sunt puţin de neînţeles; problema nu este atât de grea, decât doar dacă formula de calcul a numărului multiplilor este mai puţin cunoscută, sau transformarea inegalităţilor este încă derutantă pentru copiii de această clasă a VI-a. □

4. Clasa a VII-a

Subiectul (1)**.** *a) Arătaţi că pentru orice numere reale* a *şi* b *are loc relaţia:*

$$(a^2+1)(b^2+1)+50 \geq 2(2a+1)(3b+1).$$

b) Determinaţi numerele naturale n *şi* p *care verifică relaţia:*

$$(n^2+1)(p^2+1)+45 = 2(2n+1)(3p+1).$$

Soluţie. Un exerciţiu în factorizare şi/sau grupare de termeni. a) Grupăm

$$(a^2+1)(b^2+1)+50-2(2a+1)(3b+1) = (ab-6)^2+(a-2)^2+(b-3)^2 \geq 0,$$

cu egalitate pentru $a=2$ şi $b=3$.

b) Folosind punctul a), grupăm

$$(n^2+1)(p^2+1)+45-2(2n+1)(3p+1) = (np-6)^2+(n-2)^2+(p-3)^2-5,$$

deci cele trei pătrate perfecte trebuind a fi 0, 1 şi 4, o analiză rapidă duce la soluţiile $\boxed{(n,p) \in \{(2,2),(2,4)\}}$.

Este înduioşătoare folosirea literelor n, p în loc de mai obişnuitele m, n; probabil pentru a evita confuziile posibile în scrierea de mână a literelor m, n. Merge ... $\square$

Subiectul (2)**.** *Fie numerele reale a, b, c astfel încât:*

$$|a-b| \geq |c|,\ |b-c| \geq |a|,\ |c-a| \geq |b|.$$

Arătaţi că unul dintre numerele a, b, c este suma celorlalte două.

Soluţie. Soluţia elegantă (prima dintre soluţiile oficiale) este să ridicăm la pătrat relaţiile date, iar apoi, factorizând şi înmulţind între ele noile relaţii obţinute, să ajungem la

$$\big((a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\big)^2 \leq 0,$$

de unde (măcar) unul dintre factori trebuie să fie nul. Alternativ, asumând o ordine anume între numerele a, b şi c, putem explicita îndeajuns modulii pentru a obţine rezultatul dorit (această metodă furnizează chiar mai multe informaţii, de exemplu faptul că (cel puţin) unul dintre produsele ab, bc, ca este mai mic sau egal cu 0). $\square$

Subiectul (3)**.** *Se consideră triunghiul ABC în care măsura unghiului A este $135°$. Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează latura $[BC]$ în punctul D, iar bisectoarea unghiului B intersectează latura $[AC]$ în punctul E. Determinaţi măsura unghiului $\angle BED$.*

G.M.-B.

Soluţie. Avem relaţia $\angle AEB + \angle ABE = 180° - 135° = 45°$, şi de asemenea $\angle ABD + \angle ADB = 180° - 90° = 90°$. Deoarece $\angle ABE = \dfrac{1}{2}\angle ABD$, rezultă $\angle AEB = \dfrac{1}{2}\angle ADB$. Notând cu I centrul cercului înscris în $\triangle ABD$, rezultă că $\angle AEI = \angle ADI$, deci patrulaterul $AEDI$ este inscriptibil, prin urmare $\angle IED = \angle IAD = \boxed{45°}$.

Soluţia oficială conţine o mică eroare, care trebuie semnalată. Ea ajunge la $\triangle ABI \sim \triangle DBE$, dar corect este $\triangle ABI \sim \triangle EBD$; convenţia de scriere a asemănării a două triunghiuri obligă ordinea vârfurilor în corespondenţa de asemănare. $\square$

Soluţie Alternativă. (A. Eckstein) Punctul E este centrul cercului B-exînscris triunghiului ABD, căci $\angle DAE = 45°$. Dar atunci rezultă şi egalitatea $\angle ADE = \dfrac{1}{2}(180° - \angle ADB)$, şi deci avem imediat

$$\angle BED = 180° - (\angle DBE + \angle BDE) = 90° - \frac{\angle ABD + \angle ADB}{2} = 45°.$$

Probabil cea mai rapidă şi penetrantă soluţie. $\square$

5. Clasa a VIII-a

Subiectul (2)**.** *Pentru fiecare număr natural nenul n se notează cu $p(n)$ cel mai mare pătrat perfect cel mult egal cu n.*

a) Determinaţi numărul perechilor de numere naturale nenule (m, n), cu $m \leq n$, pentru care

$$p(2m+1) \cdot p(2n+1) = 400.$$

b) Determinaţi mulţimea $\left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 100 \text{ şi } \dfrac{p(n+1)}{p(n)} \notin \mathbb{N} \right\}$.

Soluţie. Cu alte cuvinte $p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$. a) Având $400 = 2^4 \cdot 5^2$, rezultă că $\lfloor \sqrt{2m+1} \rfloor \in \{1, 2, 4\}$, şi corespunzător $\lfloor \sqrt{2n+1} \rfloor \in \{20, 10, 5\}$. Numărul m aparţine deci mulţimilor $\{1\}, \{2, 3\}, \{8, 9, 10, 11\}$, respectiv n aparţine mulţimilor $\{200, 201, \ldots, 219\}, \{50, 51, \ldots, 59\}, \{12, 13, 14, 15, 16, 17\}$, şi deci numărul perechilor (m, n) este $1 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 6 = \boxed{64}$.

Soluţia oficială este complet dată peste cap, calculând – **cu greşeli** – pentru $p(2m-1)p(2n-1) = 400$, şi ajungând la rezultatul eronat $\boxed{84}$. Mă întreb cum s-a făcut corectura? În unele judeţe enunţul a fost cel cu semnul minus (deşi baremul continua să aibă aceleaşi greşeli de calcul) ... cine poate şti ce s-a mai întâmplat în $41+1$ centre de examinare? şi cui de fapt îi pasă?

b) Avem $p(n) \neq p(n+1)$ dacă şi numai dacă $1 < n+1 = m^2$ este pătrat perfect, şi atunci $\dfrac{p(n+1)}{p(n)} = \dfrac{m^2}{(m-1)^2} \notin \mathbb{N}$, mai puţin când $m = 2$, adică $n = 3$. Prin urmare mulţimea cerută este cea a numerelor cu 1 mai puţin decât un pătrat perfect între 9 şi 100, adică $\boxed{\{8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99\}}$.

Şi aici soluţia oficială prezintă o (benignă) eroare, făcând confuzia de notaţie între $p(n+1)$ şi $\sqrt{p(n+1)}$. □

Subiectul (4)**.** *Fie $n \geq 2$ un număr natural.*

Determinaţi mulţimea valorilor pe care le poate lua suma

$$S = \lfloor x_2 - x_1 \rfloor + \lfloor x_3 - x_2 \rfloor + \cdots + \lfloor x_n - x_{n-1} \rfloor,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale cu partea întreagă respectiv $1, 2, \ldots, n$.

S-a notat prin $\lfloor x \rfloor$ partea întreagă a numărului real x.

Soluţie. Deoarece $x_k = k + \{x_k\}$ pentru orice $1 \leq k \leq n$, avem

$$\lfloor x_k - x_{k-1} \rfloor = \lfloor 1 + \{x_k\} - \{x_{k-1}\} \rfloor \in \{0, 1\} \text{ pentru } 2 \leq k \leq n,$$

după cum $\{x_k\} < \{x_{k-1}\}$ sau $\{x_k\} \geq \{x_{k-1}\}$. Prin urmare, considerând secvenţa $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}$, valoarea sumei S este exact numărul acelor indici $2 \leq k \leq n$ pentru care $\{x_k\} \geq \{x_{k-1}\}$. Este atunci elementar faptul că mulţimea valorilor pe care le poate lua suma S este $\boxed{\{0, 1, \ldots, n-1\}}$.

În acest context, modelele din soluţia oficială devin chiar inutile, căci este evident că putem considera o astfel de secvenţă, cu valori din $[0, 1)$, având orice număr (de la 0 la $n-1$) dorit de astfel de inegalităţi.

Enunţul este cumva ambiguu. În loc de $\lfloor x_k \rfloor = k$ pentru toţi $1 \leq k \leq n$ se putea înţelege şi $\{\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \ldots, \lfloor x_n \rfloor\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Punctajele din Bucureşti arată că s-a înţeles după intenţia propunătorilor (sau au întrebat), dar am auzit că în provincie s-a mai luat şi interpretarea alternativă ...

Deşi problema pare grea prin enunţul ei oarecum complicat, fenomenul subteran este aproape trivial; dovada stă în chiar punctajele mari obţinute de peste jumătate dintre concurenţi. $\square$

6. Încheiere

Problemele de gimnaziu încep să mă intereseze mai mult (decât cele de liceu), fiind mai puţin supuse unor stricte cerinţe "tehnice", deci permiţând mai multă libertate şi originalitate (care din păcate nu sunt chiar în proporţia ideală; reţeta "gustării" este cam fadă). Cu excepţia unor scăpări jenante, un concurs curăţel, deşi cam anost.