COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015
FAZA JUDEŢEANĂ

Abstract. Comments on some of the problems presented at the 2015 District Round of the National Mathematics Olympiad.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII.
Data: 16 martie 2015.
Autor: Dan (*le druide*) Schwarz, Bucureşti.

Pour le courage, pour pas qu'il y ait de faille,
Pour rester grands et fiers quand nous serons dans la bataille.
...
Quand mon regard se posa tout autour de moi,
J'étais le seul debout de la tribu; voilà pourquoi.[1]

0. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Judeţene a Olimpiadei de Matematică 2015 reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Clasa a V-a

Subiectul (1)**.** *Determinaţi toate numerele naturale de două cifre* $\overline{ab}$*, cu* $0 < a < b \leq 9$*, care sunt egale cu suma numerelor naturale cel puţin egale cu* a *şi cel mult egale cu* b*.*

Soluţie. Fie $b = a + d$. Avem atunci $10a = da + \dfrac{d(d-1)}{2}$, care se scrie $2a(10-d) = d(d-1)$. Prin urmare $d(d-1) \geq 2(10-d)$, adică $d(d+1) \geq 20$, ceea ce forţează $d \geq 4$. Pe de altă parte avem $a \leq 9 - d$, de unde obţinem $d(d-1) \leq 2(9-d)(10-d)$, adică $d(37-d) \leq 180$, ceea ce forţează $d \leq 5$.

Acum, $d = 4$ duce la $\boxed{(a, b) = (1, 5)}$, iar $d = 5$ duce la $\boxed{(a, b) = (2, 7)}$.

---

[1] La tribu de Dana – Manau, `https://www.youtube.com/watch?v=zoPp69wxLEI`

[2] Lipsesc unele probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Soluţiile oficiale şi baremele de corectare pot fi consultate la `http://ssmr.ro/bareme`. Rezultatele finale (după contestaţii) vor fi afişate pe site-ul Inspectoratului Bucureşti.

Efortul principal este doar de a reduce la minimum numărul cazurilor de considerat. Soluţia oficială nu face economie, şi se lungeşte (în mod uşor de înţeles – sunt convins că nimeni nu a dat în concurs soluţia mea cea scurtă de mai sus). De altfel, o analiză complet exhaustivă nu comportă decât 90 de cazuri, şi se poate face – datorită valorilor prea mici implicate în problemă. Un caz tipic unde metode gândite, elaborate pentru a reduce variantele (ca în soluţia de mai sus), nu sunt de fapt descoperite şi folosite în concurs, unde sunt utilizate surogate care prin exact recurgerea la ”casework” dovedesc inadecvarea problemei pentru concurs. □

Subiectul (4)**.**

a) Arătaţi că ultimele trei cifre ale numărului 1038^2 *sunt egale cu* 4*.*

b) Arătaţi că există o infinitate de pătrate perfecte ale căror ultime trei cifre sunt egale cu 4*.*

c) Demonstraţi că nu există pătrate perfecte care să aibă ultimele patru cifre egale cu 4*.*

Soluţie.
a) şi b) Avem $38^2 = 1444$. Atunci, pentru $n \geq 3$, avem

$$(10^n + 38)^2 = 10^{2n} + 76 \cdot 10^n + 38^2 = 10^3(10^{2n-3} + 76 \cdot 10^{n-3} + 1) + 444,$$

deci acest număr se termină cu trei cifre de 4.
c) Dacă $m^2 = 10^n + 4444$, cu $n \geq 4$, atunci m este par şi

$$(m/2)^2 = 25 \cdot 10^{n-2} + 1111 = 10^2(25 \cdot 10^{n-4} + 11) + 11,$$

deci acest număr se termină cu două cifre de 1. Dar $m/2$ este atunci impar, un pătrat perfect impar este multiplu de 4 plus 1, iar numărul de mai sus este multiplu de 4 minus 1; contradicţie.

Soluţia oficială încearcă să fie mai ”prietenoasă” cu cei mici, dar cred că de fapt este mai prolixă. În plus, suferă şi de o eroare de notaţie, provenită dintr-o lacună de raţionament. □

Rezultatele sunt cele aşteptate; problema 1 a primit punctaj maxim la mulţi concurenţi, în pofida probabil a unor soluţii cu multe mici calcule. Doar problema 4 a produs ceva dificultăţi.

2. Clasa a VI-a

Subiectul (1)**.** *Pe o tablă sunt scrise la început numerele* 11 *şi* 13*. Un* ***pas*** *înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma a două numere oarecare scrise deja pe tablă. Arătaţi că:*

a) indiferent câţi paşi s-ar efectua, pe tablă nu se poate scrie numărul 86*;*

b) este posibil ca, după mai mulţi paşi, pe tablă să fie scris numărul 2015*.*

G.M.-B.

Soluţie.
a) Numerele care pot fi scrise pe tablă sunt de forma $11p + 13q$, cu p şi q numere naturale nenule. Dacă $86 = 11p + 13q$, atunci $-2 \equiv 2q \pmod{11}$, deci $q \equiv 10 \pmod{11}$, dar atunci $13q \geq 13 \cdot 10 > 86$, absurd.
b) Având $2015 = 182 \cdot 11 + 13$, numărul 2015 se poate obţine începând cu $11 + 13$, şi apoi în mod repetat adunând 11 (de încă 181 de ori).[3] $\square$

Subiectul (4)**.** *Determinaţi numerele naturale nenule A şi B, care au acelaşi număr de cifre, ştiind că*

$$2 \cdot A \cdot B = \overline{AB},$$

unde $\overline{AB}$ este numărul obţinut prin scrierea cifrelor lui B după cifrele lui A.

Soluţie. Fie $k \geq 1$ numărul (comun) de cifre ale lui A şi/sau B. Relaţia dată se scrie $2AB = 10^k A + B$, sau încă $(2A - 1)(B - 5 \cdot 10^{k-1}) = 5 \cdot 10^{k-1}$. Deoarece $2A - 1$ este impar, rezultă $2A - 1 \mid 5^k$, deci $5^k = 5^\ell(2A - 1)$ pentru un anume $0 \leq \ell \leq k$. Rezultă atunci $B - 5 \cdot 10^{k-1} = 2^{k-1}5^\ell$, deci $B = 2^{k-1}(5^k + 5^\ell) = 2^{k-1}(5^\ell(2A - 1) + 5^\ell) = 2^k 5^\ell A$.

Dar evident $B \leq 9A$ (B având acelaşi număr k de cifre ca şi A). Rezultă $\ell = 0$ şi $1 \leq k \leq 3$. Cazul $k = 1$ duce la $(A, B) = (3, 6)$. Cazul $k = 2$ duce la $(A, B) = (13, 52)$. Cazul $k = 3$ duce la $(A, B) = (63, 504)$, care nu convine, căci A trebuie să aibă 3 cifre (acest caz putea fi eliminat mai devreme, prin aplicarea unor inegalităţi ca în soluţia oficială, dar nu merita efortul). $\square$

Şi aici problema 4 a produs ceva bătăi de cap. Nu e uşor pentru cei mici să se descurce în hăţişul de relaţii şi inegalităţi posibile, pentru a comprima soluţia la un număr minim de cazuri.

3. CLASA A VII-A

Subiectul (1)**.**

a) Arătaţi că numărul $a = \sqrt{9 - \sqrt{77}} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{7}) \cdot (9 + \sqrt{77})$ este natural.

b) Se consideră numerele reale x ~~îs~~ şi y astfel încât $xy = 6$. Dacă $x > 2$ şi $y > 2$, arătaţi că $x + y < 5$.

G.M.-B.

[3] O variantă a teoremei lui Sylvester (la cazul particular al faimoasei "coin problem" a lui Frobenius), spune că dacă m şi n sunt numere naturale nenule coprime, atunci toate numerele naturale $N > mn$ pot fi reprezentate sub forma $N = pm + qn$, cu p şi q numere naturale nenule. Numărul mn nu poate fi astfel reprezentat, căci din $mn = pm + qn$ ar decurge $m \mid q$ şi $n \mid p$, deci $m \leq q$ şi $n \leq p$, dar atunci $pm + qn \geq 2mn$, absurd. Pe de altă parte, pentru $N > mn$, considerăm numerele $N - m > N - 2m > \cdots > N - nm > 0$. Nu putem avea $N - im \equiv N - jm \pmod{n}$ pentru $1 \leq i < j \leq n$, căci atunci am avea $n \mid (N - im) - (N - jm) = (j - i)m$, deci $n \mid j - i$, dar $1 \leq j - i \leq n - 1$. Prin urmare există $1 \leq p \leq n$ astfel încât $n \mid N - pm$, deci $N - pm = qn$ pentru un anume q natural nenul. La noi, $2015 > 11 \cdot 13$, deci reprezentarea este posibilă.

Soluţie.
a) Se observă că $(\sqrt{11}-\sqrt{7})^2 = 2(9-\sqrt{77})$, deci $\sqrt{9-\sqrt{77}}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{11}-\sqrt{7}$, de unde şi $a = (\sqrt{11}-\sqrt{7})^2(9+\sqrt{77}) = 2(9-\sqrt{77})(9+\sqrt{77}) = 8 \in \mathbb{N}$.
b) $2(5-(x+y)) = (x-2)(y-2) > 0$. □

Subiectul (2)**.**
a) Arătaţi că dacă există două numere naturale p şi q astfel încât $\sqrt{2p-q}$ şi $\sqrt{2p+q}$ sunt numere naturale, atunci q este par.
b) Determinaţi câte numerele naturale p au proprietatea că $\sqrt{2p-4030}$ şi $\sqrt{2p+4030}$ sunt simultan numere naturale.

Soluţie.
a) Trebuie $2p-q = a^2$ şi $2p+q = b^2$, pentru anume numere naturale a şi b. Atunci $2q = b^2-a^2 \equiv 0 \pmod 4$ (căci a şi b trebuie să aibă aceeaşi paritate).
b) Ca mai sus, $2^2\cdot 5\cdot 13\cdot 31 = 2q = b^2-a^2 = (b-a)(b+a)$, cu $b > a \geq 0$ având aceeaşi paritate, cu exact 4 soluţii, date de $b-a \in \{2, 10, 26, 62\}$. Nu trebuie precizate valorile (a, b) (ca în soluţia oficială), căci se cere doar numărul valorilor lui $p = \dfrac{a^2+b^2}{4}$. □

4. Clasa a VIII-a

Subiectul (1)**.** *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că are loc inegalitatea:*

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a-b+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

Soluţie. Condiţia ca a, b, c să fie lungimile laturilor unui triunghi apare a fi instrumentală în a asigura că radicalii sunt bine definiţi. Este bine-cunoscută substituţia $x = \dfrac{-a+b+c}{2}$, $y = \dfrac{a-b+c}{2}$, $z = \dfrac{a+b-c}{2}$, de unde $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$ (motivată din a lua x, y, z lungimile tangentelor din vârfurile triunghiului la cercul său înscris). Expresia se scrie atunci

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{y+z}{2x}} \geq \sum_{cyc}\sqrt{\frac{\sqrt{yz}}{x}} \geq 3\sqrt[3]{\prod_{cyc}\sqrt{\frac{\sqrt{yz}}{x}}} = 3,$$

cu egalitate pentru $x = y = z$, adică pentru $a = b = c$, lungimile laturilor unui triunghi echilateral.

Soluţia oficială ajunge la inegalitatea $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$, care este cunoscuta inegalitate Nesbitt (ne-identificată ca atare), pe care o demonstrează în mod conştiincios prin una dintr-un milion de metode alternative ... □

Subiectul (2)**.** *Pentru orice număr natural a definim mulţimea*

$$A_a = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2 + an} \in \mathbb{N}\}.$$

a) Arătaţi că mulţimea A_a este finită dacă şi numai dacă $a \neq 0$.
b) Determinaţi cel mai mare element al mulţimii A_{40}.

G.M.-B.

Soluţie.
a) Dacă $\sqrt{n^2 + an} \in \mathbb{N}$ atunci şi $\sqrt{(2n + a)^2 - a^2} = 2\sqrt{n^2 + an} \in \mathbb{N}$. Dar evident $A_0 = \mathbb{N}$, iar pentru $a > 0$ şi $n > \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$ avem

$$(2n + a - 1)^2 < (2n + a)^2 - a^2 < (2n + a)^2,$$

deci $(2n + a)^2 - a^2$ nu poate fi pătrat perfect, aşadar $|A_a| \leq \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + 1$.
b) Pentru a avea $(2n+40-b)^2 = (2n+40)^2 - 40^2$ cu $b > 0$ minim, va trebui $4b(n + 20) = b^2 + 40^2$, deci $4 \mid b$, aşadar $b \geq 4$.

Atunci, cu $b = 4$, avem $n = \dfrac{4^2 + 40^2}{4 \cdot 4} - 20 = 81$. □

Subiectul (3)**.** *Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii*

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2016}}\right\}.$$

Soluţie. Avem $2016 = 12^2 \cdot 14$. Prin ridicarea la pătrat a relaţiei date se obţine uşor că trebuie $(\sqrt{x/14}, \sqrt{y/14}) = (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, cu $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{12}$. Această relaţie se scrie şi $(12 - a)(b + 12) = 144$, cu exact 7 soluţii, date de $12 - a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Nu trebuie precizate valorile (x, y), căci se cere doar numărul lor.

Soluţia oficială conţine o pletoră de erori de calcul şi de notaţie, din fericire benigne cât despre validitatea metodei. □

5. ÎNCHEIERE

Calitatea generală a acestei etape judeţene este medie. S-a redus numărul de erori flagrante, dar problemele propuse sunt destul de anoste. Nici umbră de combinatorică – această disciplină care poate aduce sclipirea şi interesul unui concurs printr-un singur enunţ intrigant şi care îndeamnă la născocire. Culoarea gri predomină, nicio problemă nu este memorabilă şi nici nu trimite mai departe la curiozitatea care generează studiul şi erudiţia.

Ideea de a trece sub tăcere numele autorilor se perpetuează. Motivul pentru lipsa acestei informaţii elementare mă eludează – poate o modestie sfioasă şi ruşinoasă (glumesc, desigur).