Olimpiada Naţională de Matematică 2015
Addendum

Abstract. Additional comments on several of the problems sat at the National Olympiad 2015.

Se adresează claselor IX, X, XI, XII.
Data: 1 mai (ziua celor ce – încă – muncesc) 2015.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

Me acompaña la esperanza en la soledad.[1]

Canta por la medianoche,
Llora por la madrugada.[2]

0. Introducere

Aceste comentarii asupra Olimpiadei Naţionale 2015 reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului.

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

Intenţionam să prezint şi Testele de Selecţie II şi III seniori, care tocmai au avut loc pe 28 şi 29 aprilie, dar un *moratoriu* asupra caracterului lor public este în curs.[3]

1. Addendum Materiale Anterioare

Subiectul (4, clasa a X-a)**.** *Fie A o mulţime finită de numere reale. Fie şi mulţimile*

$$S = \{x + y \mid x, y \in A\},\ \ D = \{x - y \mid x, y \in A\}.$$

Să se arate că

$$\operatorname{card}(A) \cdot \operatorname{card}(D) \le \operatorname{card}(S)^2.$$

Soluţie. În comentariile mele anterioare asupra problemelor de la liceu, am menţionat (într-o variantă uşor diferită, dar esenţialmente echivalentă)

[1] Mercedes Sosa – La Flor Azul `https://www.youtube.com/watch?v=BC2i1OabG44`
[2] Mercedes Sosa – Balderrama `https://www.youtube.com/watch?v=RDVgtAndqi4`
[3] Rezultatele Testelor II şi III, precum şi compoziţia lotului restrâns, pot fi cercetate la `http://ssmr.ro/files/onm2015/rezultate_baraj_30.04.pdf`

> LEMMA 1. (Imre Ruzsa) If U, V, W are three non-empty finite subsets of a (not necessarily abelian) group $(G, +)$, then
> $$|V - W| \leq \frac{|U - V| \cdot |U - W|}{|U|}.$$

Nu ne rămâne decât să luăm $U = -A$, $V = W = A$, pentru astfel a obţine

$$\operatorname{card}(A) \cdot \operatorname{card}(D) \leq \operatorname{card}(S)^2.$$

Este **natural** să ne întrebăm dacă inegalitatea

$$\operatorname{card}(A) \cdot \operatorname{card}(S) \leq \operatorname{card}(D)^2$$

este şi ea adevărată? Ea nu poate fi obţinută printr-o altă particularizare convenabilă (şi nici demonstraţia directă nu mai merge). Răspunsul este totuşi **Da**, conform

> LEMMA 2. (Imre Ruzsa) If U, V, W are three non-empty finite subsets of an abelian group $(Z, +)$, then
> $$|V + W| \leq \frac{|U + V| \cdot |U + W|}{|U|},$$

doar că demonstraţia este complet diferită, şi **mult** mai complicată (folosind printre altele inegalitatea lui Plünnecke).[4] Nu ne rămâne decât să luăm $U = A$, $V = W = -A$, pentru astfel a obţine

$$\operatorname{card}(A) \cdot \operatorname{card}(S) \leq \operatorname{card}(D)^2.$$

Este interesant şi că Ruzsa observă că, pentru $\rho(X, Y) = \ln \dfrac{|X \mp Y|}{\sqrt{|X| \cdot |Y|}}$, inegalităţile din cele două leme devin $\rho(V, W) \leq \rho(V, U) + \rho(U, W)$, de tipul "inegalitatea triunghiului".

Oricum, (mai mult decât) izbitoarea asemănare cu problema 2 propusă la concursul Mediterranean Mathematics Olympiad – MMO 2011[5]

> Let A be a finite set of positive reals, let $B = \{x/y \mid x, y \in A\}$ and let $C = \{xy \mid x, y \in A\}$. Show that $|A| \cdot |B| \leq |C|^2$.
>
> GERHARD WOEGINGER

lasă mult loc de dubiu cu privire la originalitatea problemei de mai sus. De fapt ea este obţinută prin logaritmare; luând $A' = \{\ln x \mid x \in A\}$, deci cu $|A'| = |A|$, atunci

$$B' = \{\ln(x/y) \mid x, y \in A\} = A' - A' = D', \; C' = \{\ln(xy) \mid x, y \in A\} = A' + A' = S',$$

aşa încât problema dată în concurs revine la cea de la MMO. $\square$

[4] Trimit la `http://www.math.ubc.ca/~solymosi/Ruzsa_Additive_notes.pdf` unde cele două rezultate se găsesc la paginile 16, respectiv 18.

[5] `http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h430443p2434099`

Subiectul (2, Test Selecţie I Seniori)**.** *Let ABC be a triangle, and let r denote its inradius. Let R_A denote the radius of the circle internally tangent at A to the circle ABC and tangent to the line BC; the radii R_B and R_C are defined similarly. Show that*

$$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \leq \frac{2}{r}.$$

DORIN ANDRICA

Soluţia alternativă prezentată în materialul anterior

> Fie A' punctul de tangenţă a cercului de rază R_A cu BC, şi fie h_a lungimea înălţimii din A. Atunci obţinem evident $2R_A \geq AA' \geq h_a$, şi similare pentru B şi C. Prin urmare
> $$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \leq \frac{2}{h_a} + \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c} = \frac{a+b+c}{[\triangle ABC]} = \frac{2p}{pr} = \frac{2}{r},$$
> unde $[\triangle ABC]$ este aria $\triangle ABC$ iar p este semiperimetrul său.

nu face uz, după cum se vede, de faptul că cercul de rază R_A este **tangent** cercului circumscris în A, ci doar că **trece** prin punctul A. Cineva crede că face o mare cinste, lui şi ţării, popularizând aceste probleme (proaste) din circuitul românesc, unde în cea de faţă, condiţia de tangenţă în A este irelevantă, şi calificată drept herring.[6]

Subiectul (3, Test Selecţie I Seniori)**.** *A* ***Pythagorean triple*** *is a solution of the equation*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

in positive integers such that $x < y$. Given any non-negative integer n, show that some positive integer appears in precisely n distinct Pythagorean triples.

A.M.M.

Enunţul acesta apare, *tel-quel*, în volumul [TITU ANDREESCU & DORIN ANDRICA, *NUMBER THEORY, Structures, Examples, and Problems*], ca **Problema 8.2.3.** (publicată în American Mathematical Monthly), pagina 163, cu soluţie (folosind puterile lui 2) la paginile 336-337. Încă o repetiţie care putea fi uşor evitată – presupun?!? mai ales că unul dintre autori era evident prezent la alcătuirea subiectelor.

[6] Diverse link-uri, către diverse pagini
`http://www.cut-the-knot.org/triangle/DorinAndrica.shtml`
`http://www.cut-the-knot.org/triangle/Romania%20_TST_2015.pdf`
`http://www.cut-the-knot.org/triangle/PeculiarCircles.shtml`

2. Încheiere

Confuzia de date joi, 10 aprilie (când era 9 aprilie), semnalată ca apărând în Comunicatul de Presă SSMR asupra Olimpiadei Naţionale, face pui prin duminica 27 (când era 26; între timp acest lucru a fost corectat, dar a subzistat în eroare aproape o săptămână), în anunţul altfel pompos intitulat "pregătirea seniorilor şi următoarele două baraje". Calendarul asociat este

- luni 27 (orele 9:00 – 13:00) – 2 (două, *sic*!) lecţii;
- marţi 28 – barajul II;
- miercuri 29 – barajul III;
- joi 30 – discutarea rezultatelor (?!?) şi anunţarea lotului restrâns.

N-aş numi asta – **pregătire** a lotului! Iar **discutarea rezultatelor**, oare înseamnă justificarea corecturii şi a interzicerii oricărei contestaţii (inclusiv pentru trecutul baraj I)? Secvenţa evenimentelor din ultimul timp este nimic mai puţin decât fulgurantă

- 15 februarie, etapa locală;
- 25 februarie – 1 martie, Romanian Master of Mathematics;
- 14 martie, etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti;
- 7 aprilie, etapa naţională;
- 9 aprilie, barajul I (juniori şi seniori);
- 14 – 20 aprilie, EGMO (olimpiada europeană pentru fete);
- 25 aprilie, Adunarea Generală SSMR (just for fun);
- 28 aprilie, barajul II (seniori);
- 29 aprilie, barajul III (seniori);
- 3 – 8 mai, Balcaniada de Matematică.

Comparativ, să zicem, cu programul de antrenament şi teste de selecţie al unei ţărişoare ca Bielorusia în 2014, constând din multiple stagii în perioada aprilie – iunie, şi 8 teste! la noi lucrurile sunt mai concentrate decât un *ristretto*. Timpul trece mai repede în ţinuturile lui Brâncoveanu ... (iar pisica lui Schrödinger nu e nici moartă nici vie). Există undeva, în literatura psihologică, ceva numit "sindromul *burnout*", şi vorbesc aici şi de implicarea emoţională, nu doar profesională. Iar *à propos* de programul şcolar bogat şi bine balansat pe care îl propovăduiesc unii ca fiind esenţial, chiar şi pentru olimpicii la matematică, aş vrea să văd cum o fată care a participat la toate activităţile de mai sus a mai găsit timp să ia şi nota 10 la română, istorie, geografie, şi chiar (doamne păzeşte) religie. Este utopic să crezi că în zilele de azi se mai poate ajunge la vârf fără o dedicare aproape exclusivă (fie acel domeniu tenis, muzică, şah, sau ... matematică). Sacrificiul nu este de altfel neapărat permanent – mai este timp pentru obţinerea unei "culturi generale" ... iar culmea este că, în majoritate, ei au de fapt şi o solidă formare dincolo de matematică – dar pentru asta trebuie să-i cunoşti, şi nu doar să-i judeci (după înlesnirile şcolare pe care le primesc).

Comunicatul de Presă de pe site-ul Ministerului[7] relativ la EGMO 2015 (nimic pe site-ul SSMR altceva decât un sec ”FELICITARI” urmat de un link către rezultate, pe pagina sa de Facebook) nu a scăpat nici el de acum obicinuite erori

• locul 3 în clasamentul pe medalii (din 23 de ţări europene şi 7 ţări invitate. O mică inexactitate, chiar pe site-ul competiţiei, corectată acum în urma corespondenţei avute cu Joseph Myers; au fost doar 6 ţări invitate (BLRB, echipa B a Bielorusiei, a fost ”invitată”, dar nu este ne-europeană!). Dar România a terminat în acest clasament general pe locul 4; locul 3 a fost obţinut **doar** printre cele 23 de ţări europene;
• Marina Romina Ivan este de fapt Maria (poate a părut mai convingător să rimeze ...). Aceeaşi eroare este repetată şi în documentul centralizator de pe site-ul Ministerului.[8] Este o chestiune de gust dacă să numim ţara gazdă Belarus sau Bielorusia – utilizarea culorilor arată care este forma considerată corectă de mine;
• Mihai Bălună s-a înscris chiar el pe site-ul competiţiei drept Mihail (desigur, lumea îl ştie mai degrabă drept Mişu ... şi nu este aici niciun familiarism; toată lumea îi spunea Mişu Fotino marelui artist);
• rezulatele sunt în mod evident rezultatele.

Pentru prima dată de când ştiu eu (măcar ultimii zece ani), s-a impus asupra participanţilor la Testele de Selecţie II şi III interdicţia de ”a face publice subiectele”; evident, nici organizatorii (SSMR) nu le postează. Dacă motivul este pentru a preveni comentariile mele – aş fi extrem de măgulit! [9] Împreună cu măsura semi-corectivă de a invita în lotul lărgit unii concurenţi lăsaţi pe dinafară (dintr-o proastă corectură?), şi solomonică prin prevenirea lor, şi smulgerea încuviinţării că rezultatele astfel obţinute nu vor conduce către posibile locuri în echipe, mi se pare o întoarcere la vremuri de ev mediu, şi la o lipsă de transparenţă atât de mare şi arbitrară, încât mă lasă fără cuvinte (... publicabile ...). *A curse on both your houses*, spunea Mercutio. Sunt unele tensiuni, se pare, în *inner sanctum* al comisiei coordonatorilor programului de Teste; printr-o asociaţie liberă de tip freudian îmi vine în minte expresia – lacrimi de crocodil.

Duzina de muşchetari rămaşi în picioare – însângeraţi şi plini de vânătăi – au în faţă o lună de timp în care să-şi tragă sufletul. Gărzile cardinalului vor avea o viaţă uşoară ...

[7] `http://www.edu.ro/index.php/pressrel/22773`

[8] `http://www.edu.ro/index.php?module=uploads&func=download&fileId=20663`

[9] Dar bănuiesc de fapt a fi o profuză utilizare de probleme din diverse ShortLists, în conjuncţie cu alte amănunte pe care, la rândul meu, nu doresc să le fac publice ☺