COMENTARII BACALAUREAT 2014
– MATEMATICĂ M1 –

Abstract. Comments on the Mathematics M1 Baccalaureate 2014.

Data: 7 iulie 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

0. Introducere

Prezentarea, augmentată cu comentarii asupra sesiunii de Bacalaureat 2014 M1, este opinia personală a autorului. De mult pierdută încrederea în acurateţea şi didacticismul soluţiilor şi baremelor oficiale, contribui o părere personală şi certificată.

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile personale.

1. Subiectul I – **30** puncte

Sub (1;**5**). *Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice* $(a_n)_{n\geq 1}$ *ştiind că* $a_1 = 6$ *şi* $a_2 = 12$.

Soluţie. Desigur, e permis să folosim $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$, de unde $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 36$, chiar fără să calculăm a_3 ($a_3 = a_2 + (a_2 - a_1) = 18$, care apare cu atare valoare în barem). □

Sub (2;**5**). *Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x + 4.$$

Soluţie. $f(x) = x^2 + 2x + 4 = (x - (-\mathbf{1}))^2 + \mathbf{3}$, deci $V(-1, 3)$. □

Sub (3;**5**). *Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia* $(3^x-1)(3^x-3) = 0$.

Soluţie. $x \in \{0, 1\}$, din monotonia (injectivitatea) funcţiei exponenţiale. □

Sub (4;**5**).*Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr aparţinând mulţimii numerelor naturale de două cifre, acesta să conţină cifra* 1.

Soluţie. $\dfrac{10 + 8}{90} = \dfrac{1}{5}$. □

Sub (5;**5**). *Se consideră triunghiul echilateral* ABC *cu* $AB = 2$. *Calculaţi lungimea vectorului* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Soluţie. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, deci lungimea este 2. Desigur, era suficient să ştim că $\triangle ABC$ este **isoscel** în A. □

Sub (6;**5**). *Calculaţi aria triunghiului isoscel ABC ştiind că $A = \dfrac{\pi}{2}$ şi $AC = 4$.*

Soluţie. Triunghiul nu poate fi isoscel decât în A, deci aria este 8. □

Toate cele şase întrebări din Subiectul I sunt chiar mult sub nivelul unei teze normale de clasă; mai aproape de nivelul unui extemporal. Ştiu că mai trebuie şi încurajaţi elevii, dar acestea sunt practic bomboane.

2. Subiectul II – **30** puncte

Sub (1;**15**). *Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.*

*a) (**5**) Arătaţi că* $\det A(0) = 8$.
*b) (**5**) Determinaţi numerele reale a pentru care* $\det A(a) = 0$.
*c) (**5**) Determinaţi matricea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ştiind că $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.*

Soluţie. a) Direct. Hmmm ...
b) $\det A(a) = 2(4-2a) + a(a^2-2a) = a^3 - 2a^2 - 4a + 8 = (a-2)^2(a+2)$, deci $a = \pm 2$. Formula permite şi un alt răspuns direct la punctul a).
c) Matricea inversă lui $A(1)$ este $A^{-1}(1) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Atunci $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = A^{-1}(1)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Convenţia standard este să numim X **vector**, nu matrice (desigur, e **şi** matrice). □

Sub (2;**5**). *Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului*

$$f = X^3 - 2X^2 + 3X + m,$$

unde m este număr real.

*a) (**5**) Calculaţi $f(1)$.*
*b) (**5**) Arătaţi că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.*
*c) (**5**) Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.*

Soluţie. a) $f(1) = 2 + m$. Hmmm ...
b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 2^2 - 2\cdot 3 = -2$.
c) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 3(x_1+x_2+x_3) - 3m = -10 - 3m$. Atunci $-10 - 3m = 8$, care duce la $m = -6$. □

3. Subiectul III – **30** puncte

Sub (1;**15**). *Se consideră funcţia* $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

*a) (**5**) Arătaţi că* $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.

*b) (**5**) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre* $+\infty$ *la graficul funcţiei* f.

*c) (**5**) Arătaţi că* $f(x) \le \dfrac{1}{e}$ *pentru orice* $x \in (0,+\infty)$.

Soluţie. a) Direct. Hmmm ...

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, deci asimptota este $y = 0$.

c) $f'(x) = 0$ are ca unică soluţie $x = \mathrm{e}$, care este un punct de maxim global, deci $f(x) \le f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. □

Sub (2;**15**). *Se consideră funcţia* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

*a) (**5**) Arătaţi că* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{11}{6}$.

*b) (**5**) Pentru fiecare număr natural nenul* n *se consideră numărul*

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx.$$

Arătaţi că $I_{n+1} \le I_n$ *pentru orice număr natural nenul* n.

*c) (**5**) Determinaţi numărul real pozitiv* a *ştiind că* $\displaystyle\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}\,dx = \ln 3$.

Soluţie. a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{11}{6}$.

b) Pentru $0 < x < 1$ avem $x^{n+1} < x^n$, deci $\dfrac{x^{n+1}}{f(x)} < \dfrac{x^n}{f(x)}$, aşadar chiar $I_{n+1} < I_n$.

c) Deoarece $f'(x) = 2x + 1$, avem $\displaystyle\int \frac{2x+1}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln(x^2 + x + 1) + C$. Aşadar $\ln 3 = \left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^a = \ln(a^2 + a + 1)$, de unde $a^2 + a + 1 = 3$, cu soluţiile $a \in \{-2, 1\}$, din care doar $a = 1$ corespunde. □

4. Încheiere

Desigur, aceste subiecte de bacalaureat sunt menite mai degrabă a face o bună verificare a cunoştinţelor dobândite în şcoală, şi nu de a favoriza creativitatea, ca cele de olimpiadă. Nu pot să mă împiedic însă să critic platitudinea lor, şi modul oarecum mecanic de a verifica aceste cunoştinţe, în loc de a favoriza buna intuiţie şi metodele conceptuale – mai degrabă decât tehnicile aride. Un subiect mai uşor şi banal este greu de închipuit ...

O ultimă constatare; subiectele de Bacalaureat de la celelalte secţiuni au fost la fel de uşoare şi banale.

În ce măsură statisticile (inevitabil subsecvente) de promovare ale acestui bacalaureat de matematică sunt atunci cât de cât relevante? Un paternalism afişat în alegerea subiectelor de examen poate duce uşor la supra-evaluarea rezultatelor; ca şi cum i-am spune unui copil de opt ani, care **merge în picioare, nu de-a buşilea**, "bravo, Pătrăţel!" ...