Concursul **"Stelele Matematicii" 2014**

★ ★ ★ Sâmbătă, 29 noiembrie 2014, orele 09:30

★ ★ ★ Liceul Internaţional de Informatică Bucureşti

★ ★ ★ **Proba Seniori**

Problema 1. Demonstraţi că pentru orice număr întreg $n > 1$ există infinit de multe perechi (x, y) de numere întregi $1 < x < y$, astfel încât $x^n + y \mid x + y^n$.

Problema 2. Fie N un întreg pozitiv arbitrar. Demonstraţi că dacă, fiind date oricare n numere întregi consecutive mai mari decât N, putem alege 7 dintre ele, două câte două relativ prime, atunci $n \geq 22$.

Problema 3. Fie numerele întregi M, m, n astfel încât $1 \leq m \leq n$, $1 \leq M \leq \dfrac{m(m+1)}{2}$, şi fie $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $|A| = m$. Demonstraţi că există o submulţime $B \subseteq A$ cu

$$0 \leq \left(\sum_{b \in B} b\right) - M \leq n - m.$$

Problema 4. Un ogar se află la intersecţia unei mulţimi infinit numărabile de drumuri rectilinii. Pe unul dintre drumuri aleargă un iepure, distanţându-se de ogar. Singurul lucru cunoscut este că viteza (maximă) a iepurelui este strict mai mică decât viteza (maximă) a ogarului (dar nu este cunoscut raportul acestor viteze). Are ogarul o strategie pentru a prinde iepurele, într-un timp finit?

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar, dar nu conectarea la Internet. Timp de lucru $\mathbf{4\frac{1}{2}}$ ore. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultăţii; niciuna nu este trivială. Concizia şi claritatea redactării vor fi luate în consideraţie. Încercaţi să nu folosiţi mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Contestaţiile se rezolvă în direct cu comisia problemei.

★ ★ ★ **Mult SUCCES tuturor participanţilor!**