Problema 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$2^{x+1} = 2^{[2x]} + 2^{2\{x\}}.$$

* * *

Soluţie. Din inegalitatea mediilor, obţinem:

$$2^{x+1} = 2^{[2x]} + 2^{2\{x\}} \geqslant 2 \cdot \sqrt{2^{[2x]+2\{x\}}}. \quad (1)$$

Deoarece $[2x] + 2\{x\} = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + 2\{x\} = \begin{cases} 2x, & \{x\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2x+1, & \{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$,

din (1) obţinem $2^{x+1} \geqslant 2 \cdot \sqrt{2^{[2x]+2\{x\}}} = \begin{cases} 2^{x+1}, & \{x\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2^{\frac{3x+1}{2}}, & \{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$.

Cum $2^{x+1} < 2^{\frac{3x+1}{2}}$, nu se poate ca $\{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, aşadar $\{x\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.
Egalitatea are loc în (1) dacă şi numai dacă $[2x] = 2\{x\}$. Dar $\{x\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, deci $[2x] = 2\{x\} \in [0, 1) \cap \mathbb{Z}$, de unde obţinem că $[2x] = 0$, adică $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.
Ecuaţia devine: $2^{x+1} = 1 + 2^{2x} \Leftrightarrow (2^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Soluţie alternativă: Fie $x = k + f$, cu $k = [x] \in \mathbb{Z}$, $f \in [0, 1)$.
Ecuaţia devine: $2^{k+f+1} = 2^{2k+[2f]} + 2^{2f}$.
Aplicând inegalitatea mediilor, obţinem:

$$2^{k+f+1} = 2^{2k+[2f]} + 2^{2f} \geqslant 2\sqrt{2^{2k+[2f]+2f}} \geqslant 2 \cdot 2^{k+f} = 2^{k+f+1}.$$

Rezultă $[2f] = 0$ şi $2^{2k+[2f]} = 2^{2f}$, deci $2^{2k} = 2^{2f}$. Obţinem $k = f \in [0, 1) \cap \mathbb{Z}$, deci $k = f = 0$, aşadar $x = 0$.