

# Concursul “Stelele Matematicii” 2014

★ ★ ★

Sâmbătă, 29 noiembrie 2014, orele 09:30

★ ★ ★

Liceul Internațional de Informatică București

★ ★ ★

**Proba Juniori**

**Problema 1.** Arătați că există infinit de multe perechi  $(x, y)$  de numere întregi  $1 < x < y$  astfel încât  $x^3 + y \mid x + y^3$ .

**Problema 2.** Găsiți numerele întregi  $n \geq 1$  pentru care numerele  $1, 2, \dots, n$  pot fi (re)ordonate  $a_1, a_2, \dots, a_n$  astfel încât media  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$  este număr întreg pentru toate valorile  $1 \leq k \leq n$ .

**Problema 3.**

i) Arătați că există numere reale ne-negative (nu neapărat distincte)  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  și  $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ , cu  $a_k + b_k \leq 4$  pentru fiecare  $1 \leq k \leq 10$ , astfel încât  $\max\{|a_i - a_j|, |b_i - b_j|\} \geq 4/3 > 1$  pentru toți  $1 \leq i < j \leq 10$ .

ii) Demonstrați că pentru orice numere reale ne-negative (nu neapărat distincte)  $a_1, a_2, \dots, a_{11}$  și  $b_1, b_2, \dots, b_{11}$ , cu  $a_k + b_k \leq 4$  pentru fiecare  $1 \leq k \leq 11$ , există  $1 \leq i < j \leq 11$  astfel încât  $\max\{|a_i - a_j|, |b_i - b_j|\} \leq 1$ .

**Problema 4.** Într-un punct de pe axa reală se află un ogar. Pe una dintre semiaxe aleargă un iepure, distanțându-se de ogar. Singurul lucru care este cunoscut este că viteza (maximă) a iepurelui este strict mai mică decât viteza (maximă) a ogarului (dar nu este cunoscut raportul acestor viteze). Are ogarul o strategie pentru a prinde iepurele, într-un timp finit?

---

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar, dar nu conectarea la Internet. Timp de lucru  $4\frac{1}{2}$  ore. Fiecare problemă valorează 10 puncte.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultății; niciuna nu este trivială. Concizia și claritatea redactării vor fi luate în considerație. Încercați să nu folosiți mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Contestațiile se rezolvă în direct cu comisia problemei.

★ ★ ★ **Mult SUCCES tuturor participanților!**