PROBLEME
PENTRU ETAPA JUDEŢEANĂ

ABSTRACT. În vederea participării cu succes la concursurile şcolare prezentăm câteva probleme de concurs însoţite de rezolvări şi comentarii.

Lecţia se adresează clasei a VI-a

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

Problema 1: Aflaţi numerele naturale a şi b ştiind că cel mai mic multiplu comun al lor este de 12 ori mai mare decât cel mai mare divizor comun al lor şi că $6a + b = 330$.

Etapa pe municipiu, Bucureşti, 2002

Soluţie: Fie $d = (a, b)$ cel mai mare divizor comun şi $m = [a, b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

Din enunţ avem $m = 12d$. (*)

Se ştie, de asemenea că $md = ab$, de unde $m = \dfrac{ab}{d}$. (**)

Din cele două relaţii deducem $\dfrac{ab}{d} = 12d$ sau $ab = 12d^2$. (***)

Acum, $d = (a, b)$ implică $a = dx$, $b = dy$ şi $(x, y) = 1$.

Înlocuind în (***) obţinem $d^2xy = 12d^2$, de unde $xy = 12$.

Cum $(x, y) = 1$ distingem cazurile $x = 1, y = 12$; $x = 3, y = 4$; $x = 12, y = 1$ şi $x = 4, y = 3$.

Pentru $x = 1, y = 12$ avem $a = d, b = 12d$ şi înlocuind în $6a + b = 330$ obţinem $18d = 330$ care nu are soluţie naturală.

Pentru $x = 3, y = 4$ avem $a = 3d, b = 4d$ şi înlocuind în $6a + b = 330$ obţinem $22d = 330$ care are soluţia $d = 15$, de unde $a = 45$ şi $b = 60$.

Pentru $x = 12, y = 1$ avem $a = 12d, b = d$ şi înlocuind în $6a + b = 330$ obţinem $73d = 330$ care nu are soluţie naturală.

În sfârşit, pentru $x = 4, y = 3$ avem $a = 4d, b = 3d$ şi înlocuind în $6a + b = 330$ obţinem $27d = 330$ care nu are soluţie naturală.

În concluzie $a = 45$ şi $b = 60$.

Problema 2: Fie numerele naturale a, b, c astfel încât

$$\frac{a+b}{bc} = \frac{b+c}{ca} = \frac{c+a}{ab}.$$

Demonstraţi că $a = b = c$.

Etapa pe municipiu, Bucureşti, 2002

Soluţie: Este evident că a, b, c sunt numere naturale nenule.
Din $\frac{a+b}{bc} = \frac{b+c}{ca} = \frac{c+a}{ab} = p$ deducem

$$a + b = pbc \ (1)$$
$$b + c = pca \ (2)$$
$$c + a = pab \ (3).$$

Scăzând (2) din (1), (3) din (2) şi (3) din (1) obţinem

$$a - c = pc(b - a) \ (4)$$
$$b - a = pa(c - b) \ (5)$$
$$b - c = pb(c - a) \ (6).$$

Acum să presupunem că a, b, c nu sunt toate egale.

Putem avea numai două egale (alegem $a = b \neq c$ fără a pierde din generalitatea problemei) sau toate diferite.

Dacă $a = b$, din (5) rezultă $c - b = 0$, de unde $c = b$, contradicţie.

Dacă toate sunt diferite, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $a < b < c$.

În aceste condiţii $a - c < 0$ şi $b - a > 0$ ceea ce presupune că în relaţia (4) membrul stâng este negativ, iar membrul drept este pozitiv; contradicţie.

Cum pentru $a = b = c$ relaţia din enunţ este verificată rezultă că singura variantă posibilă este $a = b = c$.

Problema 3: Fie triunghiul ABC cu $AB = 3$ cm. Mediatoarea segmentului AB intersectează dreapta BC în punctul D astfel încât $BD = \frac{1}{5} \cdot BC$ şi $AC = 4 \cdot AD$. Ştiind că raportul perimetrelor triunghiurilor ADC şi ABC este $\frac{6}{7}$, calculaţi lungimea segmentului AD.

Etapa pe municipiu, Bucureşti, 2000

Soluţie: Pentru rezolvarea problemei vom folosi următorul rezultat:

Dacă M este un punct pe mediatoarea lui $[AB]$, atunci $[MA] \equiv [MB]$.

Deoarece mediatoarea segmentului AB trebuie să intersecteze dreapta BC vom distinge două cazuri, aşa cum se vede în imaginea de mai jos.

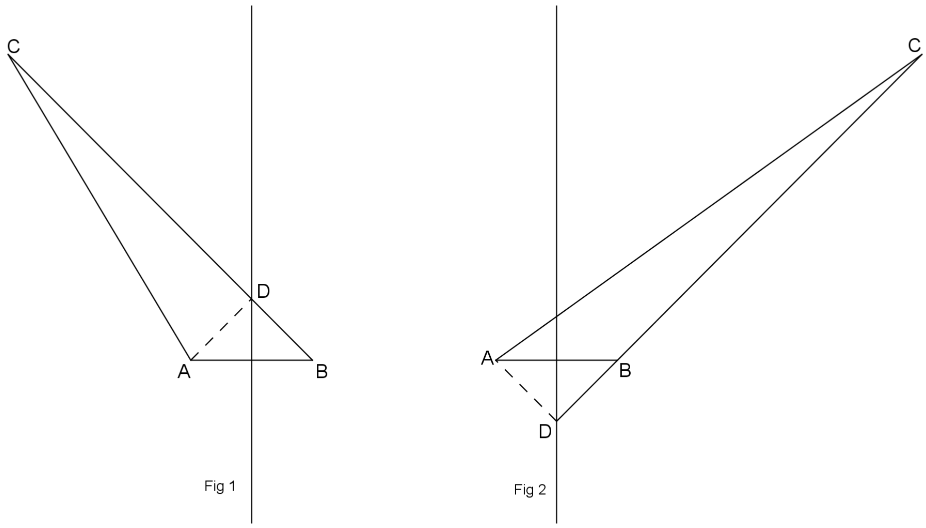


Fig 1

Fig 2

Dacă D aparţine mediatoarei segmentului AB, atunci $[AD] \equiv [DB]$.

Notând $AD = x$ rezultă $BD = x$ şi avem $BC = 5x$ (din $BD = \frac{1}{5} \cdot BC$) şi $AC = 4x$ (din $AC = 4 \cdot AD$).

Pentru Fig 1 avem $CD = 4x$ şi $P_{\triangle ADC} = 9x$, iar $P_{\triangle ABC} = 9x + 3$.

Atunci, din $\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{6}{7}$ obţinem $\frac{9x}{9x+3} = \frac{6}{7}$, de unde $x = 2$.

Deci $AD = 2$ cm.

Pentru Fig 2 avem $CD = 6x$, $AC = 4x$ şi $AD = x$. Dar acest lucru nu este posibil deoarece nu se respectă inegalitatea triunghiului ($AC + AD < CD$). Rămâne aşadar, $AD = 2$ cm.

Problema 4: Determinaţi cea mai mare fracţie astfel încât împărţind fracţiile $\frac{24}{11}; \frac{34}{13}; \frac{48}{7}$ prin această fracţie obţin câturi respectiv naturale.

Viorel Chinan

Soluţie: Fie $\frac{a}{b}$ cea mai mare fracţie ireductibilă pentru care

$$\frac{24}{11} : \frac{a}{b} = \frac{24}{11} \cdot \frac{b}{a} = x, \frac{34}{13} : \frac{a}{b} = \frac{34}{13} \cdot \frac{b}{a} = y, \frac{48}{7} : \frac{a}{b} = \frac{48}{7} \cdot \frac{b}{a} = z$$

cu x, y, z numere naturale nenule.

Cum a şi b sunt prime între ele rezultă că a trebuie să dividă pe 24, 34 şi 48, iar b trebuie să se dividă cu 11, 13 şi 7.

Din condiţia ca $\frac{a}{b}$ să fie cea mai mare avem

$$a = (24, 34, 48) \text{ şi } b = [11, 13, 7]$$

În concluzie $a = 2$ şi $b = 1001$, aşadar fracţia este $\frac{2}{1001}$.

Problema 5: Determinaţi toate numerele de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea că

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} \text{ divide } \overline{abcd} \ (a \neq 0, c \neq 0)$$

Cristian Mangra

Soluţie: Dacă $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$ divide $\overline{abcd}$, atunci există k număr natural nenul astfel încât

$$\overline{abcd} = k \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd},$$

de unde

$$100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = k \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd}$$

sau

$$100 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}(k \cdot \overline{ab} - 1).$$

Cum $k \cdot \overline{ab} - 1$ nu divide pe $\overline{ab}$ rezultă $k \cdot \overline{ab} - 1$ divide 100.

Avem aşadar $k \cdot \overline{ab} - 1 \in \{10, 20, 25, 50, 100\}$.

Singurele cazuri favorabile sunt:

$$k \cdot \overline{ab} - 1 = 25,$$

de unde

$$\overline{ab} = 13$$

şi atunci

$$\overline{abcd} = 1352$$

şi

$$k \cdot \overline{ab} - 1 = 50,$$

de unde

$$\overline{ab} = 17$$

şi atunci

$$\overline{abcd} = 1734.$$

Problema 6: Fie $p \in \mathbb{N}^*$ un număr prim, $p \notin \{2, 5\}$. Arătaţi că există un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul p^n, scris în baza 10, are ultimele trei cifre 001.

Gazeta Matematică

Soluţie: Să observăm că există o infinitate de numere naturale de forma p^t cu t număr natural nenul.

Fiind o infinitate, evident există două astfel de numere care împărţite la 1000 să dea acelaşi rest.

Fie k şi m, $(k > m)$ astfel încât p^k şi p^m dau acelaşi rest la împărţirea cu 1000.

Atunci,

$$1000 \text{ divide } p^k - p^m \text{ sau } 1000 \text{ divide } p^m \left(p^{k-m} - 1\right).$$

Cum 1000 nu divide p^m, rezultă 1000 divide $p^{k-m} - 1$, deci

$$p^{k-m} - 1 = 1000a$$

sau

$$p^{k-m} = 1000a + 1.$$

Evident

$$p^{k-m} = \overline{a_1 a_2 .... a_s 001}$$

şi atunci există $n = k - m$ care să îndeplinească cerinţa din enunţ.

Problema 7: Se consideră triunghiul echilateral ABC având lungimea unei laturi de a cm. Notăm cu E simetricul lui B faţă de C şi cu F simetricul lui C faţă de B.

Dacă $AL \perp BC, BM \perp AF, CN \perp AE, L \in (BC), M \in (AF), N \in (AE)$, atunci:

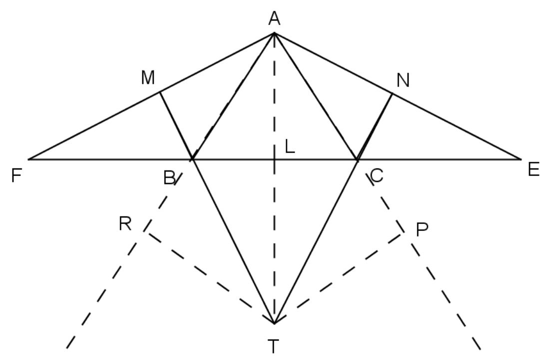
a) $[AF] \equiv [AE]$

b) Dreptele BM, CN şi AL sunt concurente

c) Ştiind că $BM + MN + NC = 100$ cm, să se determine a.

Constantin Niţă Cristi

Soluţie:



a) În $\triangle AFB$ şi $\triangle AEC$ avem $[AB] \equiv [AC]$ (din ipoteză); $[BF] \equiv [CE]$ (ambele sunt congruente cu $[BC]$); $\widehat{ABF} \equiv \widehat{ACE}$ (fiecare are câte 120^0). De aici, conform cazului L.U.L. rezultă $\triangle AFB \equiv \triangle AEC$, de unde $[AF] \equiv [AE]$.

b) Vom folosi următoarele rezultate:

Într-un triunghi isoscel înălţimea din vârf este şi bisectoare.

Un punct aparţine bisectoarei unui unghi dacă şi numai dacă este egal depărtat de laturile unghiului.

Avem $\triangle ABF$ este isoscel ($[AB] \equiv [BF]$) şi BM este înălţime, aşadar BM este bisectoarea unghiului ABF.

Cum $\widehat{ABF}$ şi $\widehat{CBR}$ sunt unghiuri opuse la vârf deducem că BM este bisectoare şi pentru unghiul CBR.

Analog CN este bisectoarea unghiului BCP.

Fie $\{T\} = MB \cap NC$.

Dacă T aparţine bisectoarei unghiului CBR avem

$$dist(T, BR) = dist(T, BC).$$

Dacă T aparţine bisectoarei unghiului BCP avem

$$dist(T, CP) = dist(T, CB).$$

Din cele două relaţii deducem

$$dist(T, BR) = dist(T, CP).$$

Cum $BR = AR$ şi $CP = AP$ deducem

$$dist(T, AR) = dist(T, AP)$$

ceea ce arată că T aparţine bisectoarei unghiului BAC, iar aceasta este chiar AL.

În concluzie, dreptele BM, CN, AL sunt concurente.

c) Pentru că B este mijlocul segmentului FC şi M este mijlocul segmentului AF (vezi punctul b) deducem că BM este linie mijlocie în triunghiul AFC, deci

$$BM = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}.$$

Analog avem NC linie mijlocie în triunghiul ABE, aşadar

$$CN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

De asemenea, MN este linie mijlocie în triunghiul AFE, deci

$$MN = \frac{EF}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Cu acestea avem

$$BM + MN + NC = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}.$$

Deci

$$\frac{5a}{2} = 100,$$

de unde

$$a = 40.$$