

COMENTARIILE OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA NAȚIONALĂ – SIBIU, 8-10 APRILIE 2014

ABSTRACT. Comments on some of the problems presented at the 2014 National Round of the Romanian National Mathematics Olympiad.

Se adresează claselor IX, X, XI, XII.

Data: 28 aprilie 2014.

Autor: Dan Schwarz-Moromete, București.

Aquila non capit muscas.

1. INTRODUCERE

Aceste comentarii asupra Etapei Naționale a Olimpiadei de Matematică 2014 reflectă opinia personală a autorului.¹ Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.²

Voi indica prin culoarea **roșie** eventualele erori, sau notațiile abuzive din enunțurile originale, și prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunț sau soluție). Voi folosi în mod predilect și culoarea **albastră** pentru comentariile de natură personală.

2. CLASA A IX-A

Subiectul (1). *Fie n un număr natural. Să se afle numerele întregi x, y, z cu proprietatea*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n(x + y + z).$$

Soluție. Ideea de bază este extrem de cunoscută; suma modulo 4 a trei pătrate de numere întregi poate fi 0 dacă și numai dacă fiecare dintre numere este par. Prin urmare, pentru $n > 1$, trebuie $x = 2x'$, $y = 2y'$, $z = 2z'$, și atunci $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2^{n-1}(x' + y' + z')$. Rămân de analizat doar cazurile

- $n = 0$, când avem $0 = 4(\sum x^2 - \sum x) = \sum(2x - 1)^2 - 3$, de unde concluzia $x, y, z \in \{0, 1\}$;
- $n = 1$, când avem $0 = \sum x^2 - 2\sum x = \sum(x - 1)^2 - 3$, de unde concluzia $x, y, z \in \{0, 2\}$.

Prin urmare soluțiile întregi sunt $x, y, z \in \{0, 2^n\}$ și numai ele. \square

¹La sugestia unui *literato* prieten al meu, care vede acest spațiu ca fiind "poiana lui Iocan" a matematicii școlare românești.

²Îmi cer scuze pentru întârziere, dar în perioada de imediat după încheierea ONM am fost ocupat cu EGMO 2014. Lipsesc unele probleme, la care nu am văzut interesul de a fi prezentate. Le găsiți pe toate (postate în timp record – bravo!), ca și rezultatele, la <http://ssmr.ro/onm2014> și <http://www.isjsb.ro/onm/>.

Subiectul (2). Fie a un număr natural impar care nu este pătrat perfect. Să se arate că dacă m și n sunt numere naturale nenule, atunci

- a) $\{m(a + \sqrt{a})\} \neq \{n(a - \sqrt{a})\}$;
 b) $\lfloor m(a + \sqrt{a}) \rfloor \neq \lfloor n(a - \sqrt{a}) \rfloor$.

Soluție. a) Dacă $\{m(a + \sqrt{a})\} = \{n(a - \sqrt{a})\}$, atunci

$$(m-n)a + (m+n)\sqrt{a} = m(a + \sqrt{a}) - n(a - \sqrt{a}) = \lfloor m(a + \sqrt{a}) \rfloor - \lfloor n(a - \sqrt{a}) \rfloor,$$

deci $(m+n)\sqrt{a} \in \mathbb{Z}$, contradicție, căci atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, imposibil.

b) Dacă $\lfloor m(a + \sqrt{a}) \rfloor = \lfloor n(a - \sqrt{a}) \rfloor = k \in \mathbb{N}$, atunci $k < m(a + \sqrt{a}) < k+1$ și $k < n(a - \sqrt{a}) < k+1$ (cu inegalități stricte, căci este vorba de numere iraționale). Dar atunci $\frac{k}{a + \sqrt{a}} + \frac{k}{a - \sqrt{a}} < m + n < \frac{k+1}{a + \sqrt{a}} + \frac{k+1}{a - \sqrt{a}}$, de unde $2k < (a-1)(m+n) < 2(k+1)$, adică $(a-1)(m+n) = 2k+1$, imposibil căci $a-1$ este par.

După cum este menționat și în soluția oficială, rezultatul este puternic corelat cu teorema Rayleigh-Beatty, căci demonstrația de la punctul b) repetă aproape identic partea care se referă la inexistența coliziunilor dintre elementele celor două șiruri.³ (Iar $n = 3$ este singurul caz unde **orice** număr natural nenul apare ca termen al unuia dintre șiruri.)

Alegerea acestei probleme, mai ales pe poziția 2, a fost însă un act de nesăbuință, după cum este relevat de rezultatele obținute. \square

Subiectul (4). Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de diametru AC . Se știe că există punctele $E \in (CD)$ și $F \in (BC)$ astfel încât dreapta AE e perpendiculară pe DF , iar AF e perpendiculară pe BE . Să se arate că $AB = AD$.

Soluție. Un exercițiu extrem de simplu – pentru o problemă 4 – bazat în exclusivitate pe faptul (aplicat de patru ori) că produsul scalar a doi vectori este nul dacă și numai dacă vectorii sunt ortogonali. \square

3. CLASA A X-A

Subiectul (1). Fie n un număr natural nenul. Pentru fiecare număr natural k vom nota cu $a(k, n)$ numărul divizorilor naturali d ai lui k astfel încât

$$k \leq d^2 \leq n^2. \text{ Să se calculeze } \sum_{k=1}^{n^2} a(k, n).$$

Soluție. Fiind dat un predicat logic \mathcal{P} , vom folosi notația, popularizată de D. Knuth, $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket = 1$ dacă \mathcal{P} este adevărat, dar $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket = 0$ dacă \mathcal{P} este fals. Fie $A(k, n) = \{d \in \mathbb{N}^* ; d \mid k, k \leq d^2 \leq n^2\}$, deci cu $|A(k, n)| = a(k, n)$. Atunci (având și $d \leq n$ dacă $d \in A(k, n)$), din principiul lui Fubini

³Vezi http://en.wikipedia.org/wiki/Beatty_sequence#Rayleigh_theorem.

$$\sum_{k=1}^{n^2} a(k, n) = \sum_{k=1}^{n^2} \sum_{d=1}^n \mathbb{I}[d \in A(k, n)] = \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^{n^2} \mathbb{I}[d \in A(k, n)] = \sum_{d=1}^n d = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}},$$

căci $d \in A(k, n)$ dacă și numai dacă $k = \ell d$, pentru $1 \leq \ell \leq d \leq n$. \square

Subiectul (2). Considerăm funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietățile:

a) $f(1) = 1$,

b) $f(p) = 1 + f(p-1)$ pentru orice număr prim p ,

c) $f(p_1 p_2 \cdots p_n) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_n)$ pentru orice numere prime, nu neapărat distincte.

Să se arate că $2^{f(n)} \leq n^3 \leq 3^{f(n)}$ pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.

Soluție. Prin urmare funcția aritmetică $k^{f(n)}$ este **total** multiplicativă, și aceasta pentru orice bază $k > 0$. Deoarece funcția $n \mapsto n^3$ este și ea total multiplicativă, este suficient să obținem inegalitățile cerute pentru n prim.

Avem $f(2) = 1 + f(1) = 2$, și $2^2 < 2^3 < 3^2$. Apoi $f(3) = 1 + f(2) = 3$, și $2^3 < 3^3 = 3^3$. **Soluția oficială păcătuiește, neconsiderând separat acest caz,**

pentru care nu se poate aplica $2 = 2^{f\left(\frac{3-1}{2}\right)} \leq \left(\frac{3-1}{2}\right)^3 = 1$, fals!

Acum putem proceda prin inducție. Pentru un $n > 3$ prim avem $n-1$ par, deci

$$f(n) = 1 + f\left(2 \cdot \frac{n-1}{2}\right) = 1 + f(2) + f\left(\frac{n-1}{2}\right) = 3 + f\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

Atunci $2^{f(n)} = 2^3 \cdot 2^{f\left(\frac{n-1}{2}\right)} \leq 2^3 \left(\frac{n-1}{2}\right)^3 = (n-1)^3 < n^3$, și similar

$3^{f(n)} = 3^3 \cdot 3^{f\left(\frac{n-1}{2}\right)} \geq 3^3 \left(\frac{n-1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}(n-1)\right)^3 > n^3$ pentru $n > 3$

(toate acestea sunt adevărate căci $\frac{n-1}{2} > 1$ are toți factorii primi mai mici decât n , deci putem aplica ipoteza de inducție).

Se vede și că de fapt inegalitățile sunt stricte, cu excepția $n^3 = 3^{f(n)}$ pentru n o putere (nenulă) a lui 3. Scrise altfel, inegalitățile exprimă faptul că $\frac{f(n)}{\ln n} \in \left[\frac{3}{\ln 3}, \frac{3}{\ln 2}\right)$; ordinul de mărime al lui $\frac{f(n)}{\ln n}$ este în jur de 3. \square

Subiectul (3). Fie n un număr natural nenul și $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Să se determine numărul funcțiilor crescătoare $f: A \rightarrow A$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice $x, y \in A$.

Soluție. Din cele date, avem $0 \leq f(k+1) - f(k) \leq (k+1) - k = 1$, pentru orice $1 \leq k \leq n-1$. Invers, orice funcție cu această proprietate îndeplinește condițiile problemei. Numărul de astfel de funcții cu $m = f(n) - f(0)$,

$0 \leq m \leq n-1$ este atunci $(n-m) \binom{n-1}{m}$, căci, pentru fiecare dintre cele

$n - m$ posibilități de a avea $m = f(n) - f(0)$, putem alege arbitrar m dintre cele $n - 1$ diferențe $f(k + 1) - f(k)$ să fie egale cu 1. Numărul total de astfel de funcții este deci

$$N = \sum_{m=0}^{n-1} (n - m) \binom{n-1}{m} = n \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} - \sum_{m=0}^{n-1} m \binom{n-1}{m},$$

dar $n \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} = n2^{n-1}$, iar

$$\sum_{m=0}^{n-1} m \binom{n-1}{m} = (n-1) \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-2}{m-1} = (n-1)2^{n-2},$$

deci $N = n2^{n-1} - (n-1)2^{n-2} = \boxed{(n+1)2^{n-2}}$. □

Subiectul (4). Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, și fie numerele complexe $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ cu $a_n \neq 0$. Să se arate că sunt echivalente afirmațiile:

P. $|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \leq |a_n + a_0|$ pentru orice număr complex z de modul 1,;

Q. $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ și $a_0/a_n \in [0, \infty)$.

Soluție. Lucrăm deci cu un polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ de grad $\deg f = n$, dat de

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell.$$

Q \implies **P.** Atunci pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ avem

$$|f(z)| = |a_n z^n + a_0| \leq |a_n| (|z|^n + |a_0/a_n|) = |a_n| (1 + |a_0/a_n|) = |a_n + a_0|.$$

P \implies **Q.** Aplicăm utila așa numită "metodă Fourier în discret".

Fie ω o rădăcină primitivă de ordin n a unității, și fie $|z| = 1$; atunci

$$\sum_{k=1}^n |f(z\omega^k)| \geq \left| \sum_{k=1}^n f(z\omega^k) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell (\omega^k)^\ell \right| = \left| \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell \sum_{k=1}^n (\omega^\ell)^k \right|.$$

Dar $|z\omega^k| = 1$ pentru orice $1 \leq k \leq n$, deci $n|a_n + a_0| \geq \sum_{k=1}^n |f(z\omega^k)|$, iar

$$\sum_{k=1}^n (\omega^\ell)^k = 0 \text{ pentru } 1 \leq \ell \leq n-1, \text{ în timp ce } \sum_{k=1}^n (\omega^\ell)^k = n \text{ pentru } \ell \in \{0, n\},$$

deci $\left| \sum_{\ell=0}^n a_\ell z^\ell \sum_{k=1}^n (\omega^\ell)^k \right| = |n(a_n z^n + a_0)|$. Rezultă că $|a_n + a_0| \geq |a_n z^n + a_0|$

pentru orice $|z| = 1$. Dacă $a_0 = 0$ atunci $a_0/a_n = 0$, iar dacă nu, atunci pentru $z = \sqrt[n]{(a_0/a_n)|a_n/a_0|}$ avem

$$|a_n| + |a_0| \geq |a_n + a_0| \geq |a_n z^n + a_0| = |a_n| + |a_0|,$$

deci $1 + |a_0/a_n| = |1 + a_0/a_n|$, echivalent cu $a_0/a_n \in [0, \infty)$.

Pe de altă parte, pentru $z = 1$ obținem $|a_n + a_0| \geq |f(\omega^k)|$ pentru toți $1 \leq k \leq n$, dar și

$$n|a_n + a_0| \geq \sum_{k=1}^n |f(\omega^k)| \geq \left| \sum_{k=1}^n f(\omega^k) \right| = n|a_n + a_0|,$$

de unde $|f(\omega^k)| = |a_n + a_0|$ pentru toți $1 \leq k \leq n$. Dacă $a_n + a_0 = 0$, rezultă $f(\omega^k) = 0$ pentru toți $1 \leq k \leq n$, iar dacă nu, notând $\varepsilon_k = \frac{f(\omega^k)}{a_n + a_0}$, deci cu

$|\varepsilon_k| = 1$, obținem $\sum_{k=1}^n |\varepsilon_k| = n = \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \right|$, ceea ce forțează $\varepsilon_k = \varepsilon$ pentru toți

$1 \leq k \leq n$ și un oarecare ε cu $|\varepsilon| = 1$. Notând $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z$, obținem $g(\omega^k) = f(\omega^k) - (a_n + a_0)$ constant pentru toți $1 \leq k \leq n$; dar $\deg g \leq n-1$, și atunci rezultă că g trebuie să fie polinomul identic nul, deci $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Acest ultim rezultat se putea obține și mai direct, înainte de a ajunge la $|a_n + a_0| \geq |a_n z^n + a_0|$ pentru orice $|z| = 1$. \square

4. CLASA A XI-A

Subiectul (1). Dacă n este un număr natural, iterata de ordin n a unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}},$$

unde f^0 este identitatea lui \mathbb{R} . Determinați funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinesc simultan următoarele două condiții:

- (a) Funcția $f^0 + f^1$ este crescătoare; și
- (b) Există un număr natural **nenul** m , astfel încât funcția $f^0 + \dots + f^m$ este descrescătoare.

Soluție. Notăm $s_n = f^0 + \dots + f^n$ pentru $n \geq 1$. Dacă $f(x) = f(y)$ atunci $s_n(x) - s_n(y) = x - y$ pentru orice $n \geq 1$, deci

$$0 \leq (x - y)^2 = (s_1(x) - s_1(y))(s_m(x) - s_m(y)) \leq 0,$$

așadar $x = y$, și deci f este injectivă; fiind și continuă, este deci monotonă. Dar atunci iteratele sale de ordin par sunt crescătoare. Rezultă prin inducție că s_n este crescătoare pentru orice $n \geq 1$ (avem $s_{n+1} = s_n + f^{n+1}$, dar și $s_{n+1} = s_{n-1} + s_1 \circ f^n$). Atunci s_m este atât descrescătoare cât și crescătoare, deci este constantă. Rezultă că $f^m = s_m - s_{m-1}$ este descrescătoare, deci f este descrescătoare, prin urmare m este impar. Dacă $m = 1$ rezultă direct că s_1 este constantă, iar dacă $m > 1$ atunci din $s_m = s_{m-2} + s_1 \circ f^{m-1}$ rezultă iarăși că s_1 este constantă. Așadar $f = -f^0 + s_1$ se citește ca $f(x) = -x + c$ pentru o constantă $c = s_1$, verificând și condițiile date (pentru chiar orice m impar). \square

Subiectul (2). *Determinați funcțiile derivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiția $f \circ f = f$.*

Soluție. Este clar că restricția lui f la $\text{Im} f$ este identitatea, căci pentru orice $y \in \text{Im} f$ va exista $x \in \mathbb{R}$ cu $f(x) = y$, și atunci $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. Acum, f fiind continuă, rezultă că $\text{Im} f$ este un interval. Dacă intervalul este degenerat (la un punct), atunci f este constantă, și verifică. Dacă nu, capetele intervalului trebuie să fie $\pm\infty$ (căci altfel una din derivatele laterale va fi egală cu 1, în contradicție cu faptul că un capăt de interval fiind un punct de extrem, derivata trebuie să fie 0), și atunci f este identitatea lui \mathbb{R} , care verifică și ea. \square

Subiectul (3). *Fie n un număr natural nenul, și A, B două matrice din $M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătați că:*

- (a) *Matricea $AB - BA$ este singulară; și*
- (b) *Dacă rangul matricei $A - B$ este 1, atunci matricele A și B comută.*

Soluție. **O simplă observație.** Notând $[A, B] = AB - BA$ (Jacobi "bracket") și $N = A - B$, din Lema lui Jacobson, care afirmă că dacă N comută cu $[N, B]$ atunci $[N, B]$ este nilpotentă, rezultă chiar faptul că $[A, B] = [N, B]$ este nilpotentă, nu doar singulară. \square

5. CLASA A XII-A

Subiectul (1). *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Pentru orice $a \in A$ definim funcțiile $s_a: A \rightarrow A$ și $d_a: A \rightarrow A$ prin $s_a(x) = ax$, $d_a(x) = xa$, oricare ar fi $x \in A$.*

a) *Presupunem că A este mulțime finită. Să se arate că: pentru orice $a \in A$, s_a este injectivă dacă și numai dacă d_a este injectivă.*

b) *Dați un exemplu de inel care conține un element a pentru care exact una dintre funcțiile s_a și d_a este injectivă.*

Soluție. **O formă complicată de a enunța un lucru simplu.** Funcția s_a este injectivă dacă și numai dacă elementul a nu este un divizor la stânga al lui zero, căci $s_a(x) = s_a(y)$ se scrie $a(x - y) = 0$. Funcția d_a este injectivă dacă și numai dacă elementul a nu este un divizor la dreapta al lui zero, căci $d_a(x) = d_a(y)$ se scrie $(x - y)a = 0$.

b) La punctul a) se arată că un inel finit nu este un astfel de exemplu (folosind faptul că injectivitatea implică bijectivitatea pentru mulțimi finite). Este cunoscut faptul că în inelele de matrice (peste un corp, sau domeniu de integritate), divizorii lui zero (la stânga sau la dreapta) sunt exact matricele cu determinant nul, deci nici acestea nu pot produce un exemplu. Atunci modelul trebuie căutat într-un spațiu de aplicații liniare infinit dimensional. De exemplu pentru inelul A al aplicațiilor liniare peste $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ putem considera elementul a "șift la dreapta", dat prin $a(f)(n) = f(n + 1)$. Deoarece a este aplicație surjectivă, d_a va fi injectivă, căci $d_a(x) = d_a(y)$ revine la $x \circ a = y \circ a$, și putem simplifica la dreapta (a surjectivă), obținând $x = y$. Dar $s_a(x) = s_a(y)$ pentru orice $y = x + t$, unde $t(f)(0) = \lambda f(0)$ și $t(f)(n) = 0$ pentru orice $n > 0$, deci s_a nu este injectivă. \square

Subiectul (2). Fie I, J două intervale, fie $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă care nu se anulează în niciun punct din J , și fie $f, g: I \rightarrow J$ două funcții derivabile, astfel încât $f' = \varphi \circ f$ și $g' = \varphi \circ g$. Să se arate că, dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) = g(x_0)$, atunci funcțiile f și g coincid.

Soluție. Soluția oficială introduce, fără nicio justificare, o primitivă Φ a funcției $\frac{1}{\varphi}$. Motivația vine din faptul că relațiile $f' = \varphi \circ f$ și $g' = \varphi \circ g$ pot

fi privite ca ecuații diferențiale, care scrise $\frac{f'(t)}{\varphi(f(t))} = \frac{g'(t)}{\varphi(g(t))} = 1$ conduc la

$$\int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{1}{\varphi(u)} du = \int_{x_0}^x \frac{f'(t)}{\varphi(f(t))} dt = \int_{x_0}^x dt = x - x_0,$$

$$\int_{g(x_0)}^{g(x)} \frac{1}{\varphi(u)} du = \int_{x_0}^x \frac{g'(t)}{\varphi(g(t))} dt = \int_{x_0}^x dt = x - x_0,$$

pentru orice $x \in I$. Atunci pentru $f(x_0) = g(x_0)$ avem $\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{1}{\varphi(u)} du = 0$, ceea ce forțează $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in I$ (căci φ este continuă și nenulă, deci de semn constant). \square

Rezultatul este așadar aproape trivial, dacă relațiile date sunt puse sub lumina apropiată. Cu atât mai ciudate sunt rezultatele obținute – probabil cea mai jos punctată problemă de la această clasă. Poate că a fost penalizată lipsa unui

Preambul. Funcția φ fiind continuă pe o mulțime conexă (un interval), și fiind nenulă, rezultă de semn constant. Atunci la fel vor fi f' și g' , deci funcțiile f și g sunt strict monotone (ceea ce dă o justificare suplimentară legitimității schimbării de variabilă din integralele de mai sus).

6. ÎNCHEIERE

Clasa a IX-a a fost cam urâtă, clasa a X-a a fost frumoasă, iar clasele a XI-a și a XII-a au fost tehnice. Una peste alta, convenabil. Din mai multe motive, nu voi comenta subiectele de la Testul de Selecție pentru Seniori.

Ömer Cerrahoğlu și-a încheiat parcursul liceal, îndreptându-se la toamnă pentru studii la M.I.T. – USA. Uluitoarea sa activitate și contribuție către prestigiul matematicii de concurs din țară au fost încununare cu premiul Laurențiu Panaitopol; pe de altă parte, în mod regretabil i s-a blocat accesul la Testele de Selecție pentru OIM, fiecare dintre responsabili aruncând vina asupra celuilalt, și lăsând chițibușuri tehnice să prevaleze peste o umanitate care s-ar fi cerut a fi recunoscătoare. Urmare a unei judecăți Solomonice, Ömer va fi prezent la Olimpiada Internațională de Matematică 2014 din Africa de Sud nu ca participant, ci ca Observator B (grație unor sponsori).⁴ Să salutăm acest jalon, și să apreciem plăcuta și benefica sa prezență pe firmamentul scenei matematice școlare românești.



⁴http://www.imo-official.org/year_reg_team.aspx?year=2014&code=ROU.

Vezi și un profil al său la <http://www.viitoriolimpici.ro/galeria-de-onoare?id=41>