Problema 2. Determinaţi numerela naturale n şi k astfel încât

$$\log_n \left(k^2+nk\right)^{n-1} - \log_k(k+n) \leqslant 1.$$

Lucian Dragomir şi *Cristian Heuberger*

Soluţie. n şi k sunt baze ale unor logaritmi, deci $n \geqslant 2$ şi $k \geqslant 2$.
Inegalitatea se rescrie: $(n-1)\cdot\log_n\left(k^2+nk\right) \leqslant 1+\log_k(k+n)$, deci $(n-1)\cdot\log_n\left(k^2+nk\right) \leqslant \log_k(k^2+nk)$, aşadar $\dfrac{n-1}{\log_{k^2+nk} n} \leqslant \dfrac{1}{\log_{k^2+nk} k}$.
Obţinem $(n-1)\cdot\log_{k^2+nk} k \leqslant \log_{k^2+nk} n$, deci $k^{n-1} \leqslant n$. (1)
Dacă $n=2$, inegalitatea (1) are unica soluţie $k=2$.
Dacă $n \geqslant 3$, atunci $n < 2^{n-1} \leqslant k^{n-1}$, deci $n < k^{n-1}$, contradicţie cu (1).
Aşadar nu există soluţii, dacă $n \geqslant 3$.