Problema 3. Fie $x, y, z > 0$ cu $xyz = 1$. Demonstraţi că

$$\frac{x}{2x^5+x+4}+\frac{y}{2y^5+y+4}+\frac{z}{2z^5+z+4}\leqslant\frac{3}{7}.$$

Când are loc egalitatea?

***

Soluţie. Cu inegalitatea mediilor obţinem $x^5+4\geqslant 5x$, iar de aici deducem că $\frac{x}{2x^5+x+4}\leqslant\frac{x}{x^5+6x}=\frac{1}{x^4+6}$. E suficient să demonstrăm că

$$\frac{1}{x^4+6}+\frac{1}{y^4+6}+\frac{1}{z^4+6}\leqslant\frac{3}{7}. \tag{1}$$

Decondiţionăm considerând $x^4=\frac{a}{b}$, $y^4=\frac{b}{c}$ şi $z^4=\frac{c}{a}$, unde $a, b, c > 0$, iar inegalitatea (1) devine $\frac{b}{a+6b}+\frac{c}{b+6c}+\frac{a}{c+6a}\leqslant\frac{3}{7}$ sau, echivalent, $\frac{6b}{a+6b}+\frac{6c}{b+6c}+\frac{6a}{c+6a}\leqslant\frac{18}{7}$. Observăm că $\frac{6b}{a+6b}-1=\frac{-a}{a+6b}$ şi încă două identităţi omoloage, prin urmare mai trebuie să demonstrăm că

$$\frac{a}{a+6b}+\frac{b}{b+6c}+\frac{c}{c+6a}\geqslant\frac{3}{7}.$$

Folosind inegalitatea lui Bergström avem succesiv:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+6b}+\frac{b}{b+6c}+\frac{c}{c+6a}&=\frac{a^2}{a^2+6ab}+\frac{b^2}{b^2+6bc}+\frac{c^2}{c^2+6ca}\\&\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6(ab+bc+ca)}\geqslant\frac{3}{7},\end{aligned}$$

ultima inegalitate fiind echivalentă cu $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = 1$.