Olimpiada Naţională de Matematică 2015
Testele de Selecţie Juniori IV şi V

Abstract. Comments on several of the problems sat at subsequent Junior Selection Tests 2015.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII.
Data: 1 iunie 2015 (ziua copiilor).
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

Mi alma entera en este chacarera.[1]

0. Introducere

Aceste comentarii asupra Testelor de Selecţie Juniori IV şi V (posterioare Testelor I, II şi III de la Olimpiada Naţională 2015) reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Addendum Materiale Anterioare

Subiectul (2, Test de Selecţie II)**.** *Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a \geq bc^2$, $b \geq ca^2$ şi $c \geq ab^2$. Determinaţi valoarea maximă a expresiei*

$$E = abc(a - bc^2)(b - ca^2)(c - ab^2).$$

Lucian Petrescu

Soluţie. (**BSJL** – AoPS) By using the **Taiwanese Transformation**, that is $a = x \cdot bc^2$, $b = y \cdot ca^2$, $c = z \cdot ab^2$ (with $x, y, z \geq 1$), then $(xyz)\,(abc)^2 = 1$. So $E = (abc)^4(x-1)(y-1)(z-1) = \dfrac{(x-1)(y-1)(z-1)}{(xyz)^2} \leq \dfrac{1}{64}$, since $\dfrac{t-1}{t^2} \leq \dfrac{1}{4}$ when $t \geq 1$, thus for $t \in \{x, y, z\}$. □

[1] Atahualpa Yupanqui – Chilca Juliana
https://www.youtube.com/watch?v=_xGuFc3LMoU

[2] Enunţuri, soluţii oficiale şi rezultate, printre care componenţa echipei jBMO, la
http://ssmr.ro/files/onm2015/baraj_juniori_27.05.2015.pdf
http://ssmr.ro/files/onm2015/baraj_juniori_28.05.2015.pdf
http://ssmr.ro/files/onm2015/rezultate_baraje_juniori.pdf
sau pe https://www.facebook.com/ssmr.ro (contul Facebook al SSMR)

sqing (un specialist în inegalităţi de pe AoPS), trimite la următoarea problemă, dată cândva la un concurs în China[3]

> Let $a, b, c > 0$ be such that $a \geq bc$, $b \geq ca$ and $c \geq ab$. Determine the maximum value of
> $$E = abc(a - bc)(b - ca)(c - ab).$$

By a similar **Taiwanese Transformation**, one gets $\max E = \left(\dfrac{4}{27}\right)^3$.

Variaţiuni pe această temă sunt infinit de multe. De exemplu, pentru $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} > 0$, şi $m, p, q, k \in \mathbb{N}$, astfel încât $(p + q - m)(k + m) > 0$ şi $a_i^m \geq a_{i+1}^p a_{i+2}^q$ pentru orice $0 \leq i \leq n$ (indicii sunt luaţi modulo n), maximul expresiei
$$E = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)^k \prod_{i=0}^{n-1} \left(a_i^m - a_{i+1}^p a_{i+2}^q\right),$$
notând $\alpha = \dfrac{p + q + k}{p + q - m}$, este $\max E = \left(\dfrac{(\alpha - 1)^{\alpha - 1}}{\alpha^\alpha}\right)^n$. Hmmm ... sper că această versiune va fi ultima pe care o văd.

Subiectul (3, Test de Selecţie III). *Considerăm triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB \neq AC$ şi cu ortocentrul în punctul H. Punctul D se află pe latura BC, iar acum cercurile circumscrise triunghiurilor ABD şi ACD intersectează pentru a doua oară dreptele AC, respectiv AB, în punctele E, respectiv F. Dacă notăm cu P punctul de intersecţie a dreptelor BE şi CF, arătaţi că $HP \parallel BC$ dacă şi numai dacă dreapta AD trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC.*

IOAN-LAURENŢIU PLOSCARU

Soluţie. (**TelvCohl** – AoPS) Let O be the circumcentre of $\triangle ABC$. Since $\angle PBC + \angle PCB = \angle EAD + \angle FAD = \angle BAC$, it follows the equality of angles $\angle BPC = 180° - \angle BAC$, therefore B, C, H, P are concyclic. Hence $HP \parallel BC$, equivalent to $\angle HCB = \angle BCP$, equivalent to $\angle BAH = \angle CAD$, finally equivalent to $O \in AD$. $\square$

2. AL PATRULEA TEST DE SELECŢIE – JUNIORI

Subiectul (1). *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Determinaţi mulţimile*
$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}$$
care îl conţin pe 2015 şi care au proprietatea că $|a_i - a_j|$ este număr prim, oricare ar fi numerele distincte $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

LUCIAN PETRESCU

[3] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1089537p4837547

Soluţie. Faptul că A nu poate conţine mai mult de două numere de aceeaşi paritate este trivial; combinat cu $n \geq 4$, aceasta forţează $n = 4$, deci nu putem avea decât (numerele de aceeaşi paritate trebuie să difere prin 2)

• $A = \{2015, 2013, 2k, 2k+2\}$ pentru un anume $k \in \mathbb{N}$. Cele şase diferenţe $a_i - a_j$ sunt atunci $2, 2+k, k, k, k+1, 1$ modulo 3, deci (măcar) una se divide prin 3 şi deci este 3 în valoare absolută. Singurele posibilităţi rămân $\boxed{A = \{2015, 2013, 2008, 2010\}}$ şi $\boxed{A = \{2015, 2013, 2018, 2020\}}$;

• $A = \{2015, 2017, 2k, 2k+2\}$ pentru un anume $k \in \mathbb{N}$. Cele şase diferenţe $a_i - a_j$ sunt atunci $1, 2+k, k, 1+k, 2+k, 1$ modulo 3, deci (măcar) una se divide prin 3 şi deci este 3 în valoare absolută. Singurele posibilităţi rămân $\boxed{A = \{2015, 2017, 2010, 2012\}}$ şi $\boxed{A = \{2015, 2017, 2020, 2022\}}$. □

Remarcă. O problemă extrem de plicticoasă, şi sterilă în consideraţiile ei ... copilăroase. Una dintre cele mai "slabe" probleme date în aceste Teste.

Subiectul (2)**.** *Rezolvaţi în* $\mathbb{N}^*$ *ecuaţia*

$$4^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 11^d = 1.$$

ALEXANDRU MIHALCU

Soluţie. Modulo 3 rezultă imediat $5^b \equiv 1 \pmod 3$, deci $b = 2e$ par. Atunci

$$(2^a \cdot 5^e - 1)(2^a \cdot 5^e + 1) = 3^c \cdot 11^d,$$

şi este evident că $2^a \cdot 5^e - 1$ şi $2^a \cdot 5^e + 1$ sunt coprime. Deoarece $2^a \cdot 5^e - 1 \neq 1$ (prea mare), şi $2^a \cdot 5^e - 1 \neq 11^d$ (privind modulo 5), rămânem cu singura posibilitate $2^a \cdot 5^e - 1 = 3^c$ şi $2^a \cdot 5^e + 1 = 11^d$, de unde $11^d - 3^c = 2$. Soluţia trivială este $d = 1, c = 2$, care duce la $\boxed{(a, b, c, d) = (1, 2, 2, 1)}$. Fie acum $d > 1, c > 2$; putem scrie $3^2(3^{c-2} - 1) = 11(11^{d-1} - 1)$. Deci trebuie $11 \mid 3^{c-2} - 1$; dar ordinul multiplicativ al lui 3 modulo 11 este 5, şi atunci trebuie $5 \mid c - 2$, şi vom avea $2 \cdot 11^2 = 3^5 - 1 \mid 3^{c-2} - 1$, absurd, căci ar duce la $11 \mid 11^{d-1} - 1$. Prin urmare nu există alte soluţii.

Soluţia oficială propune şi alte continuări posibile, printre care ... LTE (Lifting The Exponent) Lemma, pe care însă nici măcar eu – un mare şi vechi suporter al ei – nu aş vedea-o folosită aici ... e prea mult pentru atâta de puţin! □

Remarcă. Una dintre cele mai uşoare (căci directe) dintre aceste instanţe de probleme, care au devenit plictisitoare prin perena lor prezenţă în ultimele timpuri. O proastă alegere.

Subiectul (3)**.** *Considerăm triunghiul* ABC, *cu* $AB \neq AC$, *şi centrul* I *al cercului înscris în acesta. Fie* M *mijlocul laturii* BC, *iar* D *proiecţia lui* I *pe* BC. *Dreapta* AI *intersectează cercul de centru* M *şi rază* MD *în punctele* P *şi* Q. *Să se arate că* $\mathrm{m}(\angle BAC) + \mathrm{m}(\angle PMQ) = 180^\circ$.

LAURENŢIU PLOSCARU

Remarcă. Ca de cele mai multe ori, fără comentarii pentru geometrie; consultaţi soluţia oficială.

Subiectul (4)**.** *Avem n numere naturale nenule, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nu neapărat distincte, care au suma $2S$. Numărul natural k se numeşte* ***separator*** *dacă există k dintre numerele a_i care să aibă suma egală cu S indicii $1 \leq i \leq n$ pentru care suma acelor numere a_i să fie egală cu S. Care este numărul maxim posibil de numere separatoare?*

prelucrare Concursul ARANY DÁNIEL, Ungaria, 2012

Soluţie. Numerele $k = 0$ şi $k \geq n$ nu pot fi separatoare. Dacă numărul $k = 1$ este separator, atunci evident şi $k = n - 1$ este separator, şi altele nu pot fi.

Cazurile pentru n mic trebuie tratate în mod individual.

• $n = 1$ nu poate avea niciun număr separator k, deci numărul căutat este $\boxed{0}$;
• $n = 2$ poate avea cel mult numărul separator $k = 1$ (pentru $a_1 = a_2$), deci numărul căutat este $\boxed{1}$;
• $n = 3$ poate avea cel mult numerele separatoare $k \in \{1, 2\}$ (de exemplu pentru $a_1 = a_2 + a_3$), deci numărul căutat este $\boxed{2}$;
• $n = 4$ poate avea cel mult numărul separator $k = 2$ (de exemplu pentru $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$), sau numerele separatoare $k \in \{1, 3\}$ (de exemplu pentru $a_1 = a_2 + a_3 + a_4$), deci numărul căutat este $\boxed{2}$.

Dacă vom arăta că pentru $n \geq 5$ putem avea cele $n-3$ numere separatoare $k \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$, atunci, conform cu observaţia de mai sus despre $k = 1$ şi $k = n-1$ separatoare, va reieşi evident că maximul de numere separatoare este $\boxed{n-3}$. Fie deci $n \geq 5$ şi $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Alegem $a_1 + a_2 = S$, $a_3 + a_4 = a_2$, $a_5 + a_6 = a_4$, $\ldots$, $a_{2m-1} + a_{2m} = a_{2m-2}$ (şi eventual a_{2m+1} dacă n este impar), sub condiţia $S = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m-2} + (a_{2m+1}$ eventual dacă n este impar). Atunci se vede cu uşurinţă că numerele $k \in \{2, 3, \ldots, m+1\}$ sunt separatoare. Deoarece dacă k este separator, atunci şi $n - k$ este separator, rezultă că şi numerele $k \in \{n-(m+1), \ldots, n-3, n-2\}$ sunt separatoare, iar faptul că $n-(m+1) < m+1$ face ca toate numerele $k \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$ să fie separatoare, ceea ce doream. Evident, toate condiţiile pot fi îndeplinite chiar prin numere distincte.

Soluţia oficială exhibă un model particular, unde o motivaţie este oferită şi explicată, însă păcătuieşte prin omiterea cazului $n = 1$ şi prin oferirea ca răspuns a formulei generale $\max\{n-3, 2\}$, patent eronată. □

Mă întrebam la un moment dat care ar fi putut fi "prelucrarea". Referinţa dată nu este însă cea mai precisă posibil. Pe AoPS apare undeva următoarea Problem 1, Concursul ALL-RUSSIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 2001, Grade 11, în stilul specific pentru problemele date în Rusia.

> The total mass of 100 given weights with positive masses equals $2S$. A natural number k is called *middle* if some k of the given weights have the total mass S. Find the maximum possible number of middle numbers.

Şi pentru conformitate, mai jos este soluţia postată de mine (în original în limba engleză) din 4 ianuarie 2012.

Solution. We shall prove that for any $N \geq 5$ (rather than just $N = 100$), the most middle numbers are $N - 3$, namely $\{2, 3, \ldots, N - 2\}$. This is because if 1 (and so $N - 1$) is a middle number, then no other $k \in \{2, 3, \ldots, N - 2\}$ can be a middle number (for obvious reasons). The following models (foarte asemănătoare cu cele din soluţia oficială) are inspired by their inductive creation. They work for any given $S > 0$; just scale accordingly.

- For even $N \geq 6$, the model $1, 1, 1, 1; 2, 2; 4, 4; \ldots; 2^{N/2-2}, 2^{N/2-2}$; with $2S = 2^{N/2}$.
- For odd $N \geq 5$, the model $2, 2, 2; 3, 3; 6, 6; \ldots; 3 \cdot 2^{(N-1)/2-2}, 2^{(N-1)/2-2}$; with $2S = 3 \cdot 2^{(N-1)/2}$.

By induction, the middle numbers for N weights being $\{2, 3, \ldots, N - 2\}$, augmenting with the next two (equal) values to reach $N + 2$ weights, we get the pair $\{2, N\}$, and then for every pair $\{k, N - k\}$, $2 \leq k \leq N - 2$, for N weights, we obtain the pair $\{k + 1, N - k + 1\}$, $3 \leq k + 1 \leq N - 1$, in an obvious way.

For the record, the numbers for lesser values of N are

- for $N = 1$, $k \in \emptyset$, with any model;
- for $N = 2$, $k \in \{1\}$, with the model $1, 1$;
- for $N = 3$, $k \in \{1, 2\}$, with the model $1, 1, 2$;
- for $N = 4$, $k \in \{1, 3\}$, with the model $1, 1, 1, 3$. $\square$

Remarcă. Problema nu este deloc rea; ea cere o construcţie – ceea ce este totdeauna binevenit într-o problemă de combinatorică, iar răspunsul "maximal" poate fi relativ uşor "ghicit". Rezultate de aşteptat – doar patru note (mari) peste 1.

Chestiunea aceasta, a referinţelor din ce în ce mai devreme, poate deveni din ce în ce mai prevalentă, din moment ce şi alte concursuri "împrumută" (fără a numi sursa), probleme din concursuri anterioare. De cele mai multe ori, regresia se opreşte la probleme din concursuri ruseşti, cele mai originale şi fertile dintre toate.

3. Al Cincilea Test de Selecţie – Juniori

Subiectul (1). *Arătaţi că numărul* 1 *poate fi reprezentat ca suma unui număr finit* n *de numere reale subunitare, nu neapărat distincte, care numere folosesc în scrierea lor zecimală numai cifrele* 0 *şi/sau* 7. *Care este cel mai mic astfel de număr* n*?*

prelucrare DAN SCHWARZ

Soluţie. Avem $\dfrac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, care trebuie reprezentat ca suma unui număr finit n de numere reale subunitare, nu neapărat distincte, care folosesc în scrierea lor zecimală numai cifrele 0 şi/sau 1. Folosind un *greedy algorithm* se ajunge imediat la

$$0,\overline{142857} = 1 \times 0,\overline{111111} + 28 \times 0,\overline{001111} + 5 \times 0,\overline{000111} + 7 \times 0,\overline{000011} + 6 \times 0,\overline{000001},$$

o scriere care foloseşte $n = 1 + 28 + 5 + 7 + 6 = 47$ de astfel de numere.

Se vede însă uşor că trebuie $n \geq 8$; un simplu exemplu pentru $\boxed{n = 8}$ este

$$1 = 0,\overline{777777}+0,\overline{077777}+0,\overline{070777}+0,\overline{070777}+0,\overline{000777}+0,\overline{000707}+0,\overline{000707}+0,\overline{000700},$$

adică

$$1 = \frac{777777}{10^6-1}+\frac{77777}{10^6-1}+\frac{70777}{10^6-1}+\frac{70777}{10^6-1}+\frac{777}{10^6-1}+\frac{707}{10^6-1}+\frac{707}{10^6-1}+\frac{700}{10^6-1}.$$

Desigur, există şi altele, infinit de multe, reprezentări pentru $n = 8$, ca şi pentru valori $n > 8$. $\square$

Remarcă. Nu-mi mai aduc aminte prea precis după ce a fost făcută această ”prelucrare”; a trecut mult timp de când am pregătit această problemă (mai întâi pentru unul din concursurile ”Şcoala cu Ceas” – nefolosită însă acolo până în cele din urmă; se pare că prin folosirea cifrei 7 în locul uneia mai ”uşoare”, şi prin cererea determinării valorii minime a lui n). Rezultate foarte slabe pentru o problemă totuşi uşoară – doar trei note (maxime) peste 3.

Subiectul (2)**.** *Doi jucători, A şi B, iau alternativ pietre dintr-o grămadă cu $n \geq 2$ pietre. Primul mută A, care ia cel puţin o piatră şi cel mult $n-1$ pietre. În continuare, fiecare jucător aflat la mutare trebuie să ia minim o piatră şi cel mult atâtea pietre câte a luat adversarul său la precedenta mutare. Câştigă jucătorul care ia ultima piatră. Care jucător are strategie câştigătoare?*

Olimpiadă Bulgaria, 1996

Soluţie. Un joc asimetric, unde lista mutărilor permise la orice moment dat **depinde** de ultima mutare făcută. Aceasta face ca *analiza retrogradă* să fie relativ dificilă, şi presupune, la un moment dat, ”ghicirea” poziţiilor pierzătoare/câştigătoare. Putem totuşi începe uşor şi repede.

Notaţiile folosite sunt n_k pentru n pietre, dintre care pot fi luate maximum $1 \leq k \leq n$; $n_k \xrightarrow[T]{m} (n-m)_{\min\{m,n-m\}}$, unde $1 \leq m \leq k$ (superscriptul m indică numărul de pietre luate, iar subscriptul T indică tipul poziţiei atinse astfel, $T = W$ pentru câştigătoare şi $T = L$ pentru pierzătoare).

Desigur, n_n este poziţie câştigătoare, căci $n_n \xrightarrow[L]{n} 0$, iar dacă n_k este poziţie pierzătoare, atunci şi $n_{k'}$ este poziţie pierzătoare, pentru orice valoare $1 \leq k' \leq k$.

- $n = 2$ este evident poziţie pierzătoare; $2_1 \xrightarrow[W]{1} 1_1$;
- $n = 3$ este evident poziţie câştigătoare; $3_2 \xrightarrow[L]{1} 2_1$;
- $n = 4$ este poziţie pierzătoare; $4_3 \xrightarrow[W]{1} 3_1$, $4_3 \xrightarrow[W]{2} 2_2$, iar $4_3 \xrightarrow[W]{3} 1_1$;
- $n = 5$ este poziţie câştigătoare; $5_4 \xrightarrow[L]{1} 4_1$;
- $n = 6$ este poziţie câştigătoare; $6_5 \xrightarrow[L]{2} 4_2$;
- $n = 7$ este poziţie câştigătoare; $7_6 \xrightarrow[L]{1} 6_1 \left(\xrightarrow[W]{1} 5_1 \xrightarrow[L]{1} 4_1\right)$;
- $n = 8$ este poziţie pierzătoare; $8_7 \xrightarrow[W]{m} (8-m)_{\min\{m,8-m\}}$, căci
  - $8_7 \xrightarrow[W]{1} 7_1 \left(\xrightarrow[L]{1} 6_1 \xrightarrow[W]{1} 5_1 \xrightarrow[L]{1} 4_1\right)$;
  - $8_7 \xrightarrow[W]{2} 6_2 \left(\xrightarrow[L]{2} 4_2\right)$;
  - $8_7 \xrightarrow[W]{3} 5_3 \left(\xrightarrow[L]{1} 4_1\right)$;
  - $8_7 \xrightarrow[W]{m} (8-m)_{8-m}$ pentru $4 \le m \le 7$.

Conjecturăm că n_k, $1 \le k \le n-1$, este poziţie L dacă şi numai dacă n este de forma $n = 2^e f$, $1 \le e$, f impar, şi $1 \le k \le 2^e - 1$. Într-adevăr, pentru $2^e \le k \le n-1$ (ceea ce implică $f > 1$), avem

- $n_k = (2^e f)_k \xrightarrow[L]{2^e} (2^e(f-1))_{2^e} = (2^{e'} f')_{2^e}$, cu $e < e'$, f' impar, şi deci

unde $1 \le 2^e \le 2^{e'} - 1$; aplicăm ipoteza de inducţie pentru a decide că poziţia atinsă este L.

Iar pentru $1 \le k \le 2^e - 1$, atunci, pentru orice $1 \le m \le k$ cu $m = 2^s t$, $0 \le s < e$, t impar,

- $n_k = (2^e f)_k \xrightarrow[W]{m} (2^e f - 2^s t)_m = (2^s(2^{e-s} f - t))_m$, cu $e > s$, $2^{e-s} f - t$

impar, şi deci unde $2^s \le m$; aplicăm ipoteza de inducţie pentru a decide că poziţia atinsă este W.

Aşadar, pentru poziţiile n_{n-1}, cele de tip L sunt exact cele cu $n = 2^e$. $\square$

Remarcă. Şi aici rezultatele au fost relativ slabe, pentru o problemă de data aceasta nu tocmai foarte uşoară – doar patru note (maxime) peste 5.

Subiectul (3). *Arătaţi că dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 1$, atunci*

$$\frac{bc + a + 1}{a^2 + 1} + \frac{ca + b + 1}{b^2 + 1} + \frac{ab + c + 1}{c^2 + 1} \le \frac{39}{10}.$$

LUCIAN PETRESCU

Soluţie. (Lenca Cuturela – în concurs) Folosind $ab+ca = a-a^2$ (şi celelalte), se ajunge prin manipulări simple la forma echivalentă

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \leq \frac{9}{10\sum ab}.$$

Aceasta se mai scrie şi

$$\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \geq \frac{30\sum ab - 9}{10\sum ab}.$$

Dar din versiunea TITU a inegalităţii CAUCHY-SCHWARZ avem

$$\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum a^2 + 3} = \frac{1}{4 - 2\sum ab}.$$

Ar fi deci suficient să avem

$$\frac{1}{4-2\sum ab} \geq \frac{30\sum ab - 9}{10\sum ab}, \text{ adică } \frac{30\,(\sum ab)^2 - 64\sum ab + 18}{5\sum ab\,(2-\sum ab)} \geq 0,$$

finalmente

$$\frac{2\,(3\sum ab - 1)\,(5\sum ab - 9)}{5\sum ab\,(2-\sum ab)} \geq 0.$$

Dar $0 < \dfrac{\sum ab}{3} \leq \left(\dfrac{\sum a}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$, deci $0 < \sum ab \leq \dfrac{1}{3}$, de unde inegalitatea de mai sus este evident adevărată, cu egalitate pentru $\sum ab = \dfrac{1}{3}$, ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. $\square$

Soluţie Alternativă. Ca mai sus se ajunge în mod simplu la forma suficientă

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \leq \frac{27}{10}$$

pentru a obţine inegalitatea cerută. Din păcate funcţia $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ nu este concavă pe întreg intervalul $[0,1]$, ceea ce nu permite aplicarea inegalităţii lui JENSEN. Dar, după cum foarte bine explică şi justifică soluţia oficială, tangenta la această funcţie în punctul $t = \dfrac{1}{3}$ este dată de $\ell(t) = \dfrac{54-27t}{50}$, şi avem $f(t) \leq \ell(t)$ pentru orice $t \in [0,1]$. Dar atunci $\dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1} + \dfrac{1}{c^2+1}$ este dată de

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq \ell(a) + \ell(b) + \ell(c) = \frac{3\cdot 54 - 27(a+b+c)}{50} = \frac{27}{10},$$

şi totul este demonstrat, cu egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. $\square$

Remarcă. Rezultate chiar bune pentru o inegalitate nu tocmai uşoară, şi mai neobişnuită – cinci note (mari) peste 2. Evident, condiţia $a, b, c > 0$ putea fi relaxată la $a, b, c \geq 0$.

Subiectul (4). *Considerăm triunghiul ABC înscris în cercul ω şi punctul P în interiorul său. Dreptele AP, BP, respectiv CP intersectează a doua oară cercul ω în punctele D, E, respectiv F. Dacă punctele A', B', C' sunt simetricele punctelor A, B, C faţă de dreptele EF, FD, respectiv DE, arătaţi că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt asemenea.*

LAURENŢIU PLOSCARU

Remarcă. Ca de cele mai multe ori, fără comentarii pentru geometrie; consultaţi soluţia oficială. Se dovedeşte însă (în mare parte şi din cauza timpului cheltuit pe primele trei probleme) că rezultatele au fost cu totul irelevante – nicio notă diferită de 0.

Testul de Selecţie V s-a dovedit cam prea dificil pentru concurenţi (poate şi prea obosiţi de calendarul încărcat al ultimelor săptămâni).

4. Încheiere

Rezultatele acestor două Teste de Selecţie (şi echipa jBMO care a rezultat) par să justifice alegerea generală făcută asupra problemelor. Reiterez – selecţia juniorilor este mai previzibilă şi mai bine gestionată decât cea a seniorilor; acelaşi lucru se poate spune despre perioadele de pregătire. Deşi personal Testul IV mi s-a părut (mult) prea uşor, şi cu probleme nu tocmai bine alese, iar Testul V prea greu, efectul a fost cel scontat, şi departajarea dorită s-a realizat în mod satisfăcător. Urez succes echipei jBMO 2015 – în Serbia!

Deşi rezultatele detaliate au fost postate, pentru conformitate aceasta este situaţia finală, cu echipa jBMO evidenţiată.

Nume	Oraş	Clasa	Total
ECKSTEIN Andrei	Timişoara	**Leader**	
PERIANU Marius	Slatina	**Deputy**	
FIANU Mircea	Bucureşti	**Observer A**	
BĂLĂUCĂ Ştefan-Răzvan	Botoşani	9	127, 50
TÎRLIŞAN Ioan Paul Petru	Năsăud	8	105, 50
NICOLAE Ioan Andrei	Bucureşti	8	102, 00
CUTURELA Lenca Iarina	Bucureşti	8	101, 45
TIMOFTE Alexandra	Bucureşti	7	97, 00
ILIANT Theodor Mihai	Constanţa	8	90, 40
ROBU Vlad	Baia Mare	7	89, 08
MEMIŞ Edis	Constanţa	7	81, 17
GHIGHECI Andrei	Bucureşti	8	79, 94
DIMA Clara Maria	Bucureşti	8	78, 71
IGNAT Andrei-Horia	Slatina	8	71, 65
VLAD Raluca	Timişoara	9	68, 32
DRĂGOI Sabina	Bucureşti	8	49, 65

Ca o ultimă ”cosmicomicărie” (termen inventat de Italo Calvino),

Lista Nominală a Candidaţilor care pot Participa la Sesiunea Specială de Evaluare Naţională – 2015

publicată de Minister[4] îl numeşte pe Nicolae Ioan Andrei de două ori (odată la Matematică, şi odată la Informatică), ocupând două poziţii în nomenclator, şi lăsând să se înţeleagă că sunt astfel admişi 17 participanţi (şi nu **16**, ca prezenţă fizică)! Precum steagurile de la primărie, prefectură, şcoală ... nene Iancule.

[4] http://www.edu.ro/index.php/articles/22856