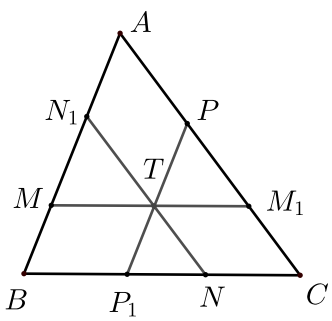
Problema 4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N, P situate pe laturile AB, BC, respectiv CA, astfel încât paralelele duse prin M, N şi P la BC, CA, respectiv AB se intersectează într-un punct T.

Ştiind că $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA}$, demonstraţi că punctul T este centrul de greutate al triunghiului ABC.

***

Soluţie. Notăm cu P_1 punctul de intersecţie al dreptelor PT şi BC, cu M_1 punctul de intersecţie al dreptelor MT şi AC, iar cu N_1 punctul de intersecţie al dreptelor TN şi AB.



Este evident că patrulaterul MTP_1B este un paralelogram, prin urmare avem $MT = BP_1$ şi $MB = TP_1$. În mod analog, patrulaterele NTM_1C şi PTN_1A sunt paralelograme, deci $NT = CM_1$, $NC = TM_1$, $PT = AN_1$ şi $PA = TN_1$.

Avem $\Delta M_1NT \sim \Delta ABC$ şi $MT = BP_1$, deci $\dfrac{N_1M}{AB} = \dfrac{MT}{BC} = \dfrac{BP_1}{BC}$, (1). Din $NN_1 \parallel AC$ rezultă $\dfrac{AN_1}{AB} = \dfrac{NC}{BC}$, (2), iar din $\Delta TP_1N \sim \Delta ABC$ şi $MB = TP_1$, obţinem $\dfrac{MB}{AB} = \dfrac{TP_1}{AB} = \dfrac{P_1N}{BC}$, (3).

Din relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\frac{AM}{AB}}{\frac{MB}{AB}} = \frac{\frac{AN_1}{AB} + \frac{N_1M}{AB}}{\frac{P_1N}{BC}} = \frac{\frac{NC}{BC} + \frac{BP_1}{BC}}{\frac{P_1N}{BC}} = \frac{1 - \frac{P_1N}{BC}}{\frac{P_1N}{BC}} = \frac{BC}{P_1N} - 1, \qquad (4)$$

şi $$\frac{BN}{NC} = \frac{\frac{BN}{BC}}{\frac{NC}{BC}} = \frac{\frac{BP_1}{BC} + \frac{P_1N}{BC}}{\frac{NC}{BC}} = \frac{1 - \frac{NC}{BC}}{\frac{NC}{BC}} = \frac{BC}{NC} - 1, \ (5).$$

Deoarece $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC}$, din (4) şi (5) deducem $P_1N = NC$, adică N este mijlocul segmentului $[P_1C]$. Cum $NT \parallel PC, T \in PP_1$, rezultă că T este mijlocul lui $[PP_1]$. Dar $PP_1 \parallel AB$, deci CT intersectează AB în mijlocul său, adică CT este dreapta suport a medianei din C în triunghiul ABC.

La fel se arată că BT este dreapta suport a medianei din B în triunghiul ABC, prin urmare T este centrul de greutate al triunghiului ABC.