PROBLEME
PENTRU ETAPA JUDEŢEANĂ

ABSTRACT. În vederea participării cu succes la concursurile şcolare prezentăm câteva probleme de concurs însoţite de rezolvări şi comentarii.

Lecţia se adresează clasei a V-a

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

Problema 1: Împărţind numărul natural a la numărul natural b obţinem restul 6. Împărţind numărul b la a obţinem restul 5. Aflaţi numerele a şi b ştiind că suma lor este cea mai mică posibil.

Şt. Vasilescu, M. Fianu

Soluţie: Din "Împărţind numărul natural a la numărul natural b obţinem restul 6" avem

$$a = b \cdot x + 6 \qquad b > 6 \qquad (1)$$

Din "Împărţind numărul b la a obţinem restul 5" avem

$$b = a \cdot y + 5 \qquad a > 5 \qquad (2)$$

introducând relaţia (1) în relaţia (2) avem

$$b = (b \cdot x + 6) \cdot y + 5$$

sau

$$b = b \cdot x \cdot y + 6 \cdot y + 5 \qquad (3)$$

Dacă $x \cdot y \geq 1$ atunci relaţia (3) nu poate fi adevărată.

Aşadar, $x \cdot y = 0$ ceea ce înseamnă x sau y este 0.

Dacă $y = 0$ atunci $b = 5$ ceea ce este în contradicţie cu afirmaţia din (1) ($b > 6$). Rezultă atunci că $x = 0$.

Pentru $x = 0$ relaţia (3) devine

$$b = 6 \cdot y + 5$$

iar din relaţia (1) deducem că

$$a = 6$$

Cu acestea suma devine

$$a + b = 6 \cdot y + 11$$

Deoarece trebuie să avem cea mai mică sumă posibilă şi $y \neq 0$ vom lua $y = 1$ şi obţinem

$$a + b = 17$$

de unde

$$b = 11$$

Problema 2: Mulţimea numerelor naturale se împarte în submulţimi astfel

$$\{0\}; \{1, 2\}; \{3, 4, 5\}; \{6, 7, 8, 9\}; ...$$

unde prima submulţime conţine primul număr natural, a doua submulţime conţine următoarele două numere naturale şi aşa mai departe.

Determinaţi

a) cu ce număr natural începe cea de-a 50-a submulţime;

b) suma elementelor celei de-a 50-a submulţime;

c) suma elementelor primelor 50 de submulţimi.

Nicolae Baciu

Soluţie: Pentru a putea rezolva problema trebuie găsită o regulă după care putem determina primul element al fiecărei submulţimi. Să observăm că a doua submulţime începe cu 1 care poate fi scris $0 + 1$. 0 este primul element din prima submulţime, iar 1 este cardinalul primei submulţimi. A treia submulţime începe cu 3 care poate fi scris $1 + 2$, adică primul element din a doua submulţime plus cardinalul celei de a doua submulţimi. Pentru submulţimea a patra avem $6 = 3 + 3$, deci aceeaşi regulă ca mai sus. Dar primul element din submulţimea a treia este $1 + 2$, deci primul element din submulţimea a patra este $1 + 2 + 3$. La următoarea submulţime, a cincea, avem primul element $6 + 4$ (după regula "primul element al submulţimii a patra plus cardinalul ei") sau $1+2+3+4$ (având în vedere cum l-am scris pe 6). Deducem că primul element al submulţimii n este $1+2+3+...+(n-1)$ şi cum $1+2+3+...+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ avem că primul element al submulţimii n este $\dfrac{n(n-1)}{2}$. De aici problema devine simplă.

a) Cea de-a 50-a submulţime începe cu $\dfrac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 = 1225$.

b) Pentru a stabili ultimul element al celei de-a 50-a submulţimi trebuie să ştim primul element al celei de a 51-a submulţimi. Acesta este $\dfrac{51 \cdot 50}{2} = 1275$.

Avem de calculat suma $S = 1225 + 1226 + 1227 + ... + 1274$.

Această sumă se poate calcula în două feluri:
1.

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 1225 + ... + 1274 - (1 + 2 + 3 + ... + 1224) =$$

$$= \frac{1274 \cdot 1275}{2} - \frac{1224 \cdot 1225}{2} = 62475.$$

2.

$$S = 1225 + 1225 + 1 + 1225 + 2 + ... + 1225 + 49 =$$

$$= 1225 \cdot 50 + 1 + 2 + ... + 49 = 1225 \cdot 50 + \frac{49 \cdot 50}{2} = 62475.$$

c) Suma elementelor primelor 50 de submulţimi înseamnă

$$T = 1 + 2 + 3 + ... + 1274 = \frac{1274 \cdot 1275}{2} = 812175.$$

Problema 3: Aflaţi numerele naturale m şi n pentru care numărul $5^m + 6^n + 2$ este pătrat perfect.

Maria Mihuţ

Soluţie: Notăm $u(n)$ cifra unităţilor lui n. Dacă $m > 0$ şi $n > 0$, atunci $u(5^m) = 5$ şi $u(6^n) = 6$, de unde rezultă $u(5^m + 6^n + 2) = 3$. Dar un pătrat perfect nu poate avea cifra unităţilor egală cu 3. Aşadar, pentru $m > 0$ şi $n > 0$ numărul nu poate fi pătrat perfect.

Trebuie să analizăm cazurile în care cel puţin unul dintre numerele m sau n este egal cu 0.

Dacă $n = 0$ şi $m > 0$ numărul devine $5^m + 3$ şi $u(5^m + 3) = 8$, deci nu este pătrat perfect (un pătrat perfect nu poate avea cifra unităţilor 8).

Dacă $m = 0$ şi $n > 0$ numărul devine $6^n + 3$ Care nu este pătrat perfect deoarece numărul se divide cu 3, dar nu se divide cu 9 (un pătrat perfect care se divide cu numărul prim p trebuie să se dividă şi cu p^2).

În sfârşit, dacă $n = m = 0$ numărul devine 4 care este pătrat perfect.

În concluzie, numărul este pătrat perfect pentru $n = m = 0$.

Problema 4: Arătaţi că nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \overline{aaaa}.$$

Vasile Şerdean

Soluţie: Avem

$$1 + 2 + 3 + ... + n = a \cdot \overline{1111} = a \cdot 11 \cdot 101$$

şi cum
$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1}{2}$$
avem
$$n(n+1) = 2 \cdot a \cdot 11 \cdot 101.$$

Trebuie să privim produsul $2 \cdot a \cdot 11 \cdot 101$ ca un produs de două numere consecutive.

Dacă unul dintre factori ar fi 101 atunci $n = 101$ sau $n + 1 = 101$.

Pentru $n = 101$ trebuie să avem $2 \cdot a \cdot 11 = 102$ şi nu există a număr natural pentru care egalitatea să fie adevărată.

Pentru $n+1 = 101$ trebuie să avem $2 \cdot a \cdot 11 = 100$ şi nu există a număr natural pentru care egalitatea să fie adevărată.

Dacă unul dintre numerele consecutive ar fi 101 înmulţit cu unul sau mai mulţi dintre factorii 2, a sau 11 numărul rămas are numai două cifre (să nu uităm că a este cifră), deci nu putem vorbi de produs de două numere consecutive.

În concluzie, nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $1 + 2 + 3 + ... + n = \overline{aaaa}$.

Problema 5: Se consideră numerele naturale consecutive
$$1; 2; 3; 4; ...; 2010; 2011.$$
Înlocuim, pe rând, câte două numere (alese la întâmplare) cu diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre ele, până când rămânem cu un singur număr. Ce paritate are acest ultim număr? Justificaţi. (*Enunţ modificat*)

Vasile Şerdean şi Alexandru Blaga

Soluţie: Pentru rezolvarea problemei trebuie să ne amintim

Diferenţa a două numere de aceeaşi paritate este un număr par.
Diferenţa a două numere de parităţi diferite este un număr impar.

Acum, în şirul de numere din problemă sunt 1005 numere pare (numerele pare din şir au forma $2k$, unde $k \in \{1, 2, 3, ..., 1005\}$) şi 1006 numere impare (numerele impare din şir au forma $2k-1$, unde $k \in \{1, 2, 3, ..., 1006\}$).

Să observăm că oricum am alege două numere de aceeaşi paritate, ele se vor înlocui cu un număr par.

Presupunând că alegem numai perechi de numere de aceeaşi paritate vom rămâne cu un număr par deoarece numărul de numere impare este par (1006) deci toate diferenţele se vor transforma în numere pare.

Dacă alegem un număr impar şi un număr par, atunci vom rămîne cu un număr impar de numere impare.

Dar, cele două numere alese se vor înlocui cu un număr impar, deci vom avea de fapt tot un număr par de numere impare.

Cum numărul de numere impare este mereu par înseamnă că în final vom rămâne cu un număr par.

Problema 6: Pentru a număr natural definim numerele $x = 2a + 3$ şi $y = 4a + 9$. Aflaţi câtul şi restul împărţirii lui y la x.

Olimpiadă Bucureşti

Soluţie: Putem scrie

$$y = 4a + 9 = 4a + 6 + 3 = 2(2a + 3) + 3$$

adică

$$y = 2x + 3 \qquad (*)$$

Dacă $x > 3$ atunci relaţia (*) reprezintă teorema împărţirii cu rest a lui y la x şi atunci

- Câtul împărţirii lui y la x este 2
- Restul împărţirii lui y la x este 3.

Dacă $x = 3$, din $2a + 3 = 3$ obţinem $a = 0$ şi atunci $y = 9$. În acest caz

- Câtul împărţirii este 3
- Restul împărţirii este 0

Problema 7: Aflaţi suma cifrelor numărului $\overline{abc}+1$ ştiind că $a+b+c = 20$.

Soluţie: Discuţia este legată de suma $c + 1$, dacă trece sau nu peste ordin.

Aşadar, pentru $c \leq 8$ avem $c + 1 \leq 9$ şi atunci

$$\overline{abc} + 1 = \overline{ab(c + 1)}$$

şi suma

$$a + b + c + 1 = 21$$

Dacă $c = 9$ avem $\overline{ab9} + 1$ şi $a + b = 11$. De această dată problema se pune în legătură cu $b + 1$; trece sau nu trece peste ordin?

Dacă $b \leq 8$, atunci $b + 1 \leq 9$ şi avem

$$\overline{ab9} + 1 = \overline{a(b + 1)0}$$

şi suma

$$a + b + 1 + 0 = 12$$

Dacă $b = 9$ avem $\overline{a99} + 1$c si $a = 2$. În acest caz

$$299 + 1 = 300$$

şi

$$3 + 0 + 0 = 3$$

În concluzie, suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 1$ este: 21 dacă $c \leq 8$; 12 dacă $c = 9$ şi $b \leq 8$ sau 3 dacă $c = 9$ şi $b = 9$.

Problema 8: Fie numerele naturale x, y, z, $x < y < z$ astfel încât $3^x + 3^y + 3^z = 2475$. Arătaţi că $M = 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z$ este pătrat perfect.

Soluţie: Trebuie să aflăm x, y şi z. Faptul că x, y, z sunt exponenţi ai unor puteri cu aceeaşi bază, 3 ne sugerează ideea de a trece numărul 2457 din baza 10 în baza 3.

Avem:

$$\begin{aligned}
2457 &= 3 \cdot 819 + 0\\
819 &= 3 \cdot 273 + 0\\
273 &= 3 \cdot 91 + 0\\
91 &= 3 \cdot 30 + 1\\
30 &= 3 \cdot 10 + 0\\
10 &= 3 \cdot 3 + 1\\
3 &= 3 \cdot 1 + 0\\
1 &= 3 \cdot 0 + 1
\end{aligned}$$

Din cele de mai sus avem

$$2457_{(10)} = 10101000_{(3)}$$

Trecerea numărului 10101000 din baza 3 în baza 10 se face astfel:

$$10101000_{(3)} = 1 \cdot 3^7 + 0 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$$

Adică

$$2457 = 3^7 + 3^5 + 3^3$$

De aici şi din $3^x + 3^y + 3^z = 2475$, cum $x < y < z$ deducem

$$x = 3, \ y = 5, \ z = 7$$

Cu acestea $M = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 49$ care este pătrat perfect ($7^2 = 49$).

Problema 9: Considerăm mulţimea $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{N}\}$. Arătaţi că printre oricare nouă elemente ale mulţimii A există cel puţin două al căror produs este pătrat perfect.

Soluţie: În rezolvarea problemei trebuie să ţinem seama de urătoarele:

1. Un număr de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ este pătrat perfect dacă toţi exponenţii sunt numere pare;

2. Suma a două numere de aceeaşi paritate este un număr par;

3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

În legătură cu elementele mulţimii A ne punem întrebarea câte dintre acestea au exponenţi de parităţi diferite.

Exponentul a poate fi par sau impar, deci 2 posibilităţi. La fel pentru exponenţii b sau c. Rezultă că avem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ elemente cu exponenţi diferiţi.

Putem proceda şi astfel. Notăm i exponenţii impari şi p exponenţii pari. Pentru exponenţii $a,\ b,\ c$ avem următoarele cazuri posibile:

$$i, i, i;\ \ i, i, p;\ \ i, p, i;\ \ p, i, i;\ \ i, p, p;\ \ p, i, p;\ \ p, p, i;\ \ p, p, p$$

în total 8 variante.

Conform principiului cutiei, având 8 variante posibile şi 9 numere vor exista cel puţin două numere care să aibă aceeaşi formă a exponenţilor.

Înmulţind aceste două elemente exponenţii produsului sunt numere pare, aşadar produsul este un pătrat perfect. (Exemplu: Dacă $x = 2^i \cdot 3^p \cdot 5^i$ şi $y = 2^i \cdot 3^p \cdot 5^i$, atunci $x \cdot y = 2^{i+i} \cdot 3^{p+p} \cdot 5^{i+i} = 2^p \cdot 3^p \cdot 5^p$)

Problema 10: Un pătrat cu latura de 5 cm se împarte în pătrăţele cu latura de 1 cm, în total 25 de pătrăţele. Fiecare pătrăţel se numerotează cu numere naturale de la 1 la 25 (fiecare număr apare o singură dată). Există o numerotare astfel încât exact pe o linie sau pe o coloană suma să fie un număr par?

Soluţie: Răspunsul este **NU**, iar justificarea este următoarea:

Suma tuturor numerelor înscrise în pătrat este

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 25 = \frac{25 \cdot 26}{2} = 325$$

Dacă notăm $L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4,\ L_5$ suma numerelor de pe liniile 1, 2, 3, 4 respectiv 5, atunci

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 = 325$$

Presupunem că suma de pe o singură linie este număr par. Atunci celelalte patru sume sunt numere impare.

În aceste condiţii, în suma $L_1+L_2+L_3+L_4+L_5$ apar 4 numere impare şi un număr par, ceea ce înseamnă că $L_1+L_2+L_3+L_4+L_5$ este un număr par.

Dar $L_1+L_2+L_3+L_4+L_5=325$, adică număr impar.

Contradicţia apare de la presupunerea pe care am făcut-o şi anume că exact pe o linie suma este un număr par. Aşadar presupunerea nu este corectă.

La fel se procedează dacă în locul liniilor vom considera coloanele.