

Problema 4. Un număr *isteț* este un număr format numai din cifre care reprezintă numere prime și are 2023 de cifre. Câte numere istețe au suma oricăror două cifre alăturate un număr impar?

Mihai Bunget, Tg. Jiu

Soluție: Cifrele care reprezintă numere prime sunt 2, 3, 5 și 7.

Dacă suma a două astfel de numere este un număr impar, atunci unul dintre numere este 2.

Numerele istețe căutate pot avea una dintre formele $F_1 = 2_2_2 \dots 2$ sau $F_2 = _2_2 \dots 2$.

În F_1 cifra 2 apare pe pozițiile impare, iar în F_2 cifra 2 apare pe pozițiile pare.

Un număr cu 2023 de cifre are 1012 poziții impare și 1011 poziții pare.

În F_1 rămân de completat 1011 poziții, fiecare cu una dintre cifrele 3, 5 sau 7.

Obținem așadar $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3}_{\text{de } 1011 \text{ ori}} = 3^{1011}$ numere de forma F_1 .

În F_2 rămân de completat 1012 poziții, fiecare cu una dintre cifrele 3, 5 sau 7.

Obținem așadar $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3}_{\text{de } 1012 \text{ ori}} = 3^{1012}$ numere de forma F_2 .

În total sunt $3^{1011} + 3^{1012} = 3^{1011} \cdot 4$ numere istețe care au suma oricăror două cifre alăturate un număr impar.