ViitoriOlimpici.ro

Problema 4
Etapa 3
Clasa a VI-a

Problema 4. Există numerele naturale m și n pentru care

$$3n^4 - 25m^5 = 4625?$$

Justificați răspunsul dat.

* * *

Soluţie: Pentru $n = 0$ obținem $-m^5 = 185$, relație imposibilă dacă m este număr natural.

Pentru $m = 0$ obținem $3n^4 = 4625$, relație imposibilă dacă n este natural pentru că $3 \nmid 4625$.

Presupunem că există numere naturale nenule m și n astfel încât $3n^4 - 25m^5 = 4625$.

Deoarece $25m^5$ și 4625 se divid cu 5, deducem că $5 \mid 3n^4$.

Cum $5 \nmid 3$ rezultă $5 \mid n^4$, deci $n = 5p$, unde p este număr natural nenul.

Egalitatea din enunț devine $1875p^4 - 25m^5 = 4625$ sau, prin împărțire la 25, $75p^4 - m^5 = 185$.

Acum, deoarece $75p^4$ și 185 se divid cu 5 deducem că $m = 5r$, unde r este număr natural nenul.

Egalitatea devine $75p^4 - 3125r^5 = 185$, iar prin împărțire la 5 obținem $15p^4 - 625r^5 = 37$.

Cum membrul stâng al egalități este un număr divizibil cu 5, iar membrul drept nu se divide cu 5, deducem că ultima egalitate nu poate fi adevărată, deci presupunerea făcută este falsă.

În concluzie, nu există numere naturale m și n pentru care $3n^4-25m^5 = 4625$.