PREZENTARE CONCURSUL "CUPA DUNĂRII" CĂLĂRAŞI 2014

Abstract. Presentation with solutions for the problems asked at the Juniors and Seniors Tests of the Danube Cup competition, Călăraşi 2014.

Data: 20 octombrie 2014.
Autor: Dan S – Bucureşti.

Il faut imaginer Sisyphe heureux.[1]

0. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii şi de soluţii ale autorului, asupra Testelor Juniori şi Seniori de la concursul Cupa Dunării, Călăraşi 2014, este, după cum ne-am obişnuit, opinia personală a autorului.[2]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

1. Testul Cupa Dunării – Juniori

Subiectul (1)**.** *Determinaţi numărul natural* $a = \dfrac{p+q}{r} + \dfrac{q+r}{p} + \dfrac{r+p}{q}$*, unde* p*,* q *şi* r *sunt numere prime pozitive.*

Lucian Petrescu

Soluţie. Dacă $p = q = r$ atunci $\boxed{a = 6}$. Dacă $p = q \neq r$ atunci trebuie $pr \mid 2(p^2 + r^2)$, deci $p \mid 2r^2$ şi $r \mid 2p^2$, imposibil. Dacă p, q, r sunt distincte atunci trebuie $pqr \mid pq(p + q) + qr(q + r) + rp(r + p)$, deci $p \mid qr(q + r)$, $q \mid rp(r + p)$, $r \mid pq(p + q)$, adică $p \mid q + r$, $q \mid r + p$, $r \mid p + q$. Prin urmare $pqr \mid p + q + r$, de unde $pqr \leq p + q + r$, adică $\dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{pq} + \dfrac{1}{qr} + \dfrac{1}{rp} \geq 1$, imposibil. □

Remarcă. Un prim defect este folosirea cuvântului articulat numărul, ceea ce deja sugerează că răspunsul este unic. Iar apoi, manipulările pentru a ajunge la acest răspuns sunt atât de triviale, că nu le-aş vedea cerute nici la un extemporal de clasă. Nu înţeleg deloc rezultatele obţinute în concurs ...

[1] Albert Camus – Le mythe de Sisyphe.

[2] Consultaţi site-ul `http://www.scoala5calarasi.ro/barbilian.php` pentru enunţuri, soluţii "oficiale" şi rezultate. Nimic nu a fost încă încărcat pe site-ul SSMR.

Subiectul (2)**.** *Numim **cuvânt** o succesiune de litere* $\ell_1\ell_2\ldots\ell_n$, $n \geq 1$. *Un cuvânt se numeşte **palindrom** dacă* $\ell_k = \ell_{n-k+1}$, *pentru oricare* $1 \leq k \leq n$. *Se consideră un cuvânt* $X = \ell_1\ell_2\ldots\ell_{2014}$, *în care* $\ell_k \in \{A, B\}$, *pentru oricare* $1 \leq k \leq 2014$. *Demonstraţi că sunt suficiente* 806 *cuvinte palindrom pe care să le "lipim" astfel încât să obţinem cuvântul* X.

Cristian Lazăr

Soluţie. Întreg misterul problemei se lămureşte dacă facem simpla observaţie că $806 = \frac{2}{5}\cdot 2010 + \frac{2}{4}\cdot 4$. Dacă arătăm că orice cuvânt de lungime 4 sau 5 se poate obţine prin "lipirea" a cel mult 2 cuvinte palindrom, rezultatul decurge, segmentând cuvântul X în 402 cuvinte de lungime 5 şi unul de lungime 4. În cele ce urmează putem presupune prima literă a fi A.

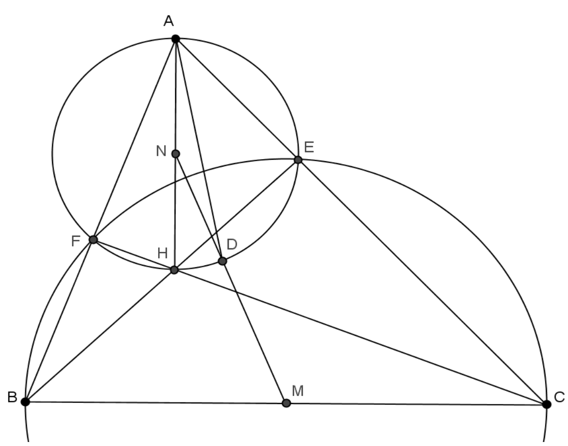
Avem $AAAA = (AAAA)$, $AAAB = (AAA)(B)$, $AABA = (A)(ABA)$, $AABB = (AA)(BB)$, $ABAA = (ABA)(A)$, $ABAB = (A)(BAB)$, $ABBA = (ABBA)$, $ABBB = (A)(BBB)$.

Singurele cuvinte de lungime 5 de interes rămân $AABAA = (AABAA)$, $ABBBB = (A)(BBBB)$, $ABBBA = (ABBBA)$, $ABBAB = (ABBA)(B)$, $ABBAA = (ABBA)(A)$, $ABABB = (ABA)(BB)$, $ABABA = (ABABA)$, $ABAAB = (A)(BAAB)$, $ABAAA = (ABA)(AA)$. $\square$

Remarcă. Rămâne de văzut dacă acest număr 806 nu poate fi diminuat. Există doar două cuvinte de lungime 6 care încep cu litera A şi pentru care trebuie să "lipim" 3 cuvinte palindrom, anume $AABBAB$ şi $AABABB$, dar s-ar putea face o analiză mai detaliată pentru a vedea efectul existenţei a multe astfel de subcuvinte în X ... La prima vedere, numărul 806 pare a putea fi diminuat, dar analiza va fi cel puţin plicticoasă.

Subiectul (3)**.** *Se consideră triunghiul* ABC, $\mathrm{m}(\widehat{A}) < 90°$, $AB \neq AC$. *Se notează cu* H *ortocentrul triunghiului* ABC, *cu* N *mijlocul segmentului* $[AH]$, *cu* M *mijlocul segmentului* $[BC]$ *şi cu* D *punctul de intersecţie a bisectoarei unghiului* $\widehat{BAC}$ *cu segmentul* $[MN]$. *Demonstraţi că* $\mathrm{m}(\widehat{ADH}) = 90°$.

selectată de Mircea Fianu



Soluţie. (Laurenţiu Ploscaru) Fie E, respectiv F, picioarele înălţimilor din B, respectiv C. Observăm că M şi N sunt centrele cercurilor în care sunt înscrise patrulaterele $BCEF$, respectiv $AEHF$; prin urmare dreapta MN este mediatoarea segmentului $[EF]$. Dar atunci punctul D este intersecţia dintre mediatoarea lui $[EF]$ şi bisectoarea unghiului $\widehat{EAF}$, de unde reiese că $D \in \odot(AEF)$. Cum AH este diametru în acest cerc, rezultă că unghiul $\widehat{ADH}$ este drept. □

Remarcă. Notaţiile sunt stranii; odată se vorbeşte de măsura unghiului $\widehat{A}$, iar altădată despre unghiul $\widehat{BAC}$, de parcă n-ar fi acelaşi unghi ... Iar semnele de "unghi" se pare că nu au fost "recunoscute" de imprimantă, şi acest fapt n-a fost remarcat, aşa încât foile de concurs arată ca dracu' ...

Subiectul (4)**.** *Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ ale căror sumă este egală cu* 0*. Arătaţi că, printre perechile (a_i, a_j), $1 \leq i < j \leq 2n$, există cel puţin $2n - 1$ perechi cu proprietatea că $a_i + a_j \geq 0$.*

selectată de Cristian Mangra

Soluţie. (Laurenţiu Ploscaru) Este arhicunoscut faptul că cele $n(2n - 1)$ perechi formate cu elemente dintr-o mulţime cu $2n$ elemente pot fi grupate în $2n - 1$ familii cu câte n perechi fiecare, în fiecare din aceste familii reuniunea elementelor perechilor sale fiind formată din toate cele $2n$ elemente. Aceasta se poate reformula de exemplu prin existenţa unei agende de $2n - 1$ runde de câte n meciuri fiecare, în care $2n$ echipe se întâlnesc fiecare cu fiecare.[3]

Or, în cazul nostru, din moment ce suma elementelor perechilor din fiecare familie este suma tuturor celor $2n$ numere, deci 0, înseamnă că măcar una dintre perechi are suma elementelor cel puţin egală cu 0. □

Remarcă. Nu pot fi garantate mai mult de $2n - 1$ astfel de perechi; dacă doar $a_1 > 0$, avem exact $2n - 1$ astfel de perechi, anume (a_1, a_k), $2 \leq k \leq 2n$. La fel se demonstrează că există cel puţin $2n - 1$ perechi cu suma elementelor cel mult egală cu 0. Să observăm şi că rezultatul nu mai rămâne neapărat adevărat pentru un număr impar $N = 2n + 1$ de numere; de exemplu pentru $N = 3$, cu numerele $5, 5, -10$ putem forma doar o singură pereche cu suma ne-negativă, şi nu $N - 1 = 2$. Rezultă însă imediat că vor exista cel puţin $N - 2$ astfel de perechi. Deşi problema este atractivă, esenţa ei este "re-vopsirea" unui rezultat clasic.

[3] Pentru conformitate, prezentarea algebrică a celor $2n - 1$ runde este după cum urmează. Runda k, $1 \leq k \leq 2n - 1$, este formată din perechile $\{i, j\}$ cu $i + j \equiv k \pmod{2n - 1}$, $1 \leq i \neq j \leq 2n - 1$, mai puţin pentru acel $1 \leq r \leq 2n - 1$ cu $r \equiv nk \pmod{2n - 1}$ (când am avea $r + r \equiv k \pmod{2n - 1}$), pentru care se formează perechea $\{r, 2n\}$.

Mult mai estetic plăcută ochiului este geometrizarea soluţiei. Asociem primelor $2n - 1$ elemente vârfurile unui poligon regulat cu $2n - 1$ laturi. Etichetăm şi laturile cu numerele $1, 2, \ldots, 2n - 1$. Atunci runda k, $1 \leq k \leq 2n - 1$, va fi formată din perechile (de vârfuri) care sunt capetele laturii etichetate k şi ale diagonalelor paralele cu ea; rămâne ne-împerechiat vârful opus, pe care îl punem în pereche cu elementul $2n$.

Văd că s-a revenit la prostul obicei de a menţiona autorii problemelor pe foile de concurs (desigur, toate creditele cuvenite trebuie date în cadrul prezentării soluţiilor). Rezultatele Testului Juniori nu sunt concludente, deşi au participat 19 concurenţi, dintre care 16 din România. Problemele au fost relativ uşoare – poate nici măcar de dificultatea unui obişnuit test de selecţie jBMO. Cu toate acestea, mai ales subiectul 4 a creat unele probleme participanţilor, după cum se vede mai jos. Scorul cel mai mare a fost 25/28.

Subiect/Puncte	$7-6$	$5-4$	$3-2$	$1-0$
1	6	3	3	7
2	7	1	1	10
3	7	3	1	8
4	4	0	3	12

2. Testul Cupa Dunării – Seniori

Subiectul (1)**.** *Două cercuri secante $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ au punctele comune A şi A'. Tangenta în A la $\mathcal{C}_1$ taie $\mathcal{C}_2$ în B, tangenta în A la $\mathcal{C}_2$ taie $\mathcal{C}_1$ în C, iar dreapta BC taie din nou $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ în D_1, respectiv D_2. Se consideră punctele $E_1 \in (AD_1)$ şi $E_2 \in (AD_2)$, astfel încât $AE_1 = AE_2$. Dreptele BE_1 şi AC se intersectează în punctul M, dreptele CE_2 şi AB se intersectează în punctul N, iar dreptele MN şi BC se intersectează în punctul P. Arătaţi că PA este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC.*

Soluţie. Rareori am văzut un enunţ mai aglomerat! Oricum nu am eu tragere de inimă în a analiza problemele de geometrie, dar de prezenta fug ca dracul de agheasmă. Consultaţi soluţia oficială ... $\square$

Subiectul (2)**.** *Fie S o mulţime de numere naturale nenule, astfel încât $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\sqrt{y}\rfloor$, oricare ar fi elementele x şi y ale lui S. Arătaţi că produsele xy, unde $x, y \in S$, sunt distincte două câte două.*

Soluţie. Fie $m \geq 1$ valoarea comună. Atunci $S \subseteq \{m^2, m^2+1, \ldots, m^2+2m\}$. Fie $x = m^2+i$, $y = m^2+j$, $z = m^2+k$, $t = m^2+\ell$, cu $i, j, k, \ell \in \{0, 1, \ldots, 2m\}$, $\{i, j\} \neq \{k, \ell\}$, $xy = zt$. Atunci trebuie $m^2((i+j)-(k+\ell)) = k\ell - ij$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune $k\ell > ij$ (evident nu putem avea $(i+j)-(k+\ell) = 0 = k\ell - ij$, căci atunci $\{i, j\} = \{k, \ell\}$). Avem atunci $m^2 \leq k\ell - ij \leq 4m^2$, deci $1 \leq (i+j)-(k+\ell) \leq 4$, şi există $\lambda \in \{1, 2, 3, 4\}$ astfel încât $k\ell = \lambda m^2 + ij$ şi $k + \ell = (i+j) - \lambda$. Discriminantul ecuaţiei de gradul 2 de rădăcini k şi ℓ va fi $\Delta = (i+j)^2 - 2\lambda(i+j) + \lambda^2 - 4\lambda m^2 - 4ij$, adică $\Delta = ((i-j)^2 - 4\lambda m^2) - \lambda(2(i+j) - \lambda)$.

Din $k\ell \geq m^2 + ij \geq m^2$ rezultă $k + \ell \geq 2\sqrt{k\ell} \geq 2m$. Atunci $i + j \geq k + \ell + 1 \geq 2m + 1$ duce la $\min\{i, j\} > 0$, şi atunci $(i-j)^2 < 4m^2 \leq 4\lambda m^2$. Finalmente $\Delta < -\lambda(2(i+j) - \lambda) \leq -\lambda(2(2m+1) - \lambda) \leq -\lambda(6 - \lambda) < 0$, ceea ce neagă realitatea rădăcinilor k, ℓ. Prin urmare $xy \neq zt$, deci produsele xy, unde $x, y \in S$, sunt distincte două câte două. $\square$

Soluţii Alternative. Dacă $xy = zt$, cu $\{x, y\} \neq \{z, t\}$, atunci vom putea presupune $m^2 \leq x < z \leq t < y \leq m^2 + 2m$. Deoarece $(z - x)(t - x) > 0$, atunci $0 < zt - zx - xt + x^2 = xy - zx - xt + x^2 = x((x + y) - (z + t))$, deci $x + y - z - t \geq 1$. Deoarece evident avem şi $x + y + z + t > 4m^2$, rezultă $4m^2 < (x + y + z + t)(x + y - z - t) = (x + y)^2 - (z + t)^2 \leq (x + y)^2 - 4zt = (x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 \leq (2m)^2 = 4m^2$, contradicţie.

Altfel, un notoriu (şi uşor de demonstrat) rezultat, cunoscut sub numele de "lema celor patru numere", afirmă existenţa a patru numere întregi pozitive p, q, r, s astfel ca $x = pq$, $y = rs$, $z = pr$, $t = qs$. Din $x < z$ rezultă $q < r$, iar din $x < t$ rezultă $p < s$. Atunci $q + 1 \leq r$ şi $p + 1 \leq s$, şi deci

$$y = rs \geq (q + 1)(p + 1) \geq (\sqrt{pq} + 1)^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 \geq (m + 1)^2,$$

în contradicţie cu $y \leq (m + 1)^2 - 1$. □

Remarcă. Deoarece $m^2(m^2 + 2m + 1) = (m^2 + m)(m^2 + m)$, nu putem extinde plaja de valori. Cea mai veche referinţă legată de această **cunoscută** problemă este Olimpiada India 1998.

Subiectul (3). *Arătaţi că, oricare ar fi numărul întreg $n \geq 2$, există o mulţime de n numere întregi compuse, coprime două câte două, care formează o progresie aritmetică.*

Soluţie. Deja Wacław Sierpiński cerea, în Problema 52 din cele 250 "Probleme Elementare" ale sale, găsirea unei progresii aritmetice oricât de lungi, cu termenii doi câte doi coprimi. Soluţia prezentată acolo era de a lua progresia $\{1 + k \cdot n! \mid 1 \leq k \leq n\}$. Nu ne rămâne decât să adăugăm o mică variaţie şi sofisticare. Fie $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_m \leq n < p_{m+1} < \cdots < p_{m+n}$ încadrarea lui n între termenii şirului numerelor prime. Considerăm sistemul de congruenţe $x \equiv 1 \pmod{p_1 p_2 \cdots p_m}$ şi $x \equiv -k \cdot n! \pmod{p_{m+k}^2}$ pentru $1 \leq k \leq n$. Din Lema Chineză a Resturilor, sistemul admite un întreg pozitiv a drept soluţie, şi vom considera progresia $\{a + k \cdot n! \mid 1 \leq k \leq n\}$.

Acum, $p_{m+k}^2 \mid a + k \cdot n!$, deci termenii ei sunt numere compuse, iar pentru $1 \leq i \neq j \leq n$, dacă ar exista un astfel de număr prim p pentru care $p \mid \text{c. m. m. d. c.}(a + i \cdot n!, a + j \cdot n!)$, atunci $p \mid |(a + i \cdot n!) - (a + j \cdot n!)| = |i - j| n!$. Dar $1 \leq |i - j| < n$, deci am avea $p \leq n$, aşadar $p = p_\ell$ pentru un $1 \leq \ell \leq m$, iar atunci $p_\ell \mid i \cdot n!$ şi deci $p_\ell \mid (a + i \cdot n!) - i \cdot n! = a$, absurd. Prin urmare termenii progresiei sunt doi câte doi coprimi. □

Remarcă. Metoda este o aplicaţie clasică a Lemei Chineze. Desigur, o astfel de progresie **infinită** $\{a + kr \mid k \geq 1\}$ (cu $r \neq 0$) nu poate exista nici măcar sub condiţia mai restrânsă a lui Sierpiński, deoarece pentru un număr prim q care divide $a + r$ am avea şi $q \mid a + (q + 1)r$. Soluţia oficială propune o alternativă chiar mai simplă, care nici măcar nu recurge la Lema Chineză.

Subiectul (4). *Fie n un număr natural nenul şi fie $\triangle$ triunghiul cu vârfurile în punctele laticiale $(0, 0)$, $(n, 0)$ şi $(0, n)$. Determinaţi cardinalul maxim al unei mulţimi S de puncte laticiale situate în interiorul sau pe bordul lui $\triangle$, astfel încât segmentul determinat de oricare două puncte distincte din S să nu fie paralel cu niciuna dintre laturile lui $\triangle$.*

Soluţie. Fiecărui punct laticial (x, y) din interiorul sau de pe bordul lui $\triangle$ îi asociem tripletul $(x, y, n-x-y)$, având $0 \leq x, y$ şi $x+y \leq n$ (coordonate triliniare). O astfel de mulţime $S = \{(a_i, b_i, c_i) \mid 1 \leq i \leq N)\}$ are deci proprietăţile

- $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{N}$, pentru orice $1 \leq i \leq N$;
- $a_i + b_i + c_i = n$, pentru orice $1 \leq i \leq N$;
- $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$, $c_i \neq c_j$, pentru orice $1 \leq i \neq j \leq N$.

Ni se cere să determinăm valoarea $N_3(n) = \max N$. O interpretare combinatorică alternativă poate fi şi după cum urmează – trebuie determinat numărul maxim de "nebuni" (ca la şah), care nu se ameninţă unul pe celălalt, situaţi în noduri ale reţelei obţinute prin partiţionarea triunghiului $\triangle$ în n^2 mici triunghiuri (dreptunghice de catetă 1) prin paralele la laturile lui $\triangle$. Răspunsul este $\boxed{N_3(n) = \lfloor 2n/3 \rfloor + 1}$, după cum urmează.

Avem $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(a_i + b_i + c_i) = Nn$ pe de o parte, şi

$$\sum_{i=1}^{N}(a_i+b_i+c_i) = \sum_{i=1}^{N} a_i + \sum_{i=1}^{N} b_i + \sum_{i=1}^{N} c_i \geq 3(0+\cdots+(N-1)) = \frac{3N(N-1)}{2}$$

pe de altă parte, căci fiecare valoare poate apare cel mult câte odată pentru fiecare dintre coordonate. Rezultă deci că $n \geq \dfrac{3(N-1)}{2}$, adică $N \leq \left\lfloor \dfrac{2n}{3} \right\rfloor + 1$. Modele maximale posibile sunt după cum urmează

- pentru $n = 3m$, putem lua tripletele $(0, m, 2m)$, $(1, m+1, 2m-2)$, $\ldots, (m, 2m, 0), (m+1, 0, 2m-1), (m+2, 1, 2m-3), \ldots, (2m, m-1, 1)$.
- pentru $n = 3m+1$, putem lua tripletele $(1, m, 2m)$, $(2, m+1, 2m-2)$, $\ldots, (m+1, 2m, 0), (m+2, 0, 2m-1), (m+3, 1, 2m-3), \ldots, (2m+1, m-1, 1)$.
- pentru $n = 3m-1$, putem în fine lua tripletele $(0, m+1, 2m-2)$, $\ldots, (m-1, 2m, 0), (m, 0, 2m-1), (m+1, 1, 2m-3), \ldots, (2m-1, m-1, 1)$.

Cu aceasta, demonstraţia este completă. $\square$

Remarcă. S-a mai întâmplat şi în trecut cu una dintre problemele mele.[4] Aceasta, după o idee şi un caz particular al lui Vasile Pop, generalizată chiar la k-upluri (în loc de triplete), a fost propusă pentru Olimpiada Internaţională din 2009, ajungând pe Lista Scurtă, în exact această versiune, cu $k = 3$. Cazurile $k > 3$ sunt dificile prin exhibarea modelelor maximale; cazul extrem $k = n$ este o versiune simplă, plăcută ochiului, pentru care $N_n(n) = 3$, iar $N_2(n) = n + 1$ este trivial, la fel ca şi $N_{2n}(n) = 2$. Vezi

`http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1932924`

[4]Tot la Călăraşi, în 2010, a fost reutilizată ca Problema 1 cerinţa de a determina acele numere întregi $n \geq 3$ pentru care poligonul regulat cu n laturi poate fi descompus în triunghiuri isoscele, prin diagonale care nu se traversează; vezi de exemplu **RMC 2011**, paginile 63-64. Problema a fost iniţial întrebată la un concurs IMAR de prin 2005/2007.

De altfel, problema a fost întrebată – în toată generalitatea ei – ca Problema 4 la concursul "Şcoala cu Ceas" de la Râmnicu Vâlcea 2010; vezi de exemplu **RMC 2010**, paginile 39 şi 150-151.

Dacă cei ce au selecţionat problema pentru acest concurs de la Călăraşi erau la curent cu toate acestea, rămâne totuşi o decizie chestionabilă. Dacă nu, şi nu au ştiut să vadă sub formularea de faţă (puţin diferită) izomorfismul cu problema din trecut, este încă mai grav.

Au participat 31 de concurenţi, dintre care 26 din România. Problemele au fost relativ uşoare – poate nu chiar de dificultatea unui obişnuit test de selecţie IMO. Cu toate acestea, mai ales subiectul 4 a creat enorme probleme participanţilor, după cum se vede mai jos (vezi şi comentariul extins de la această problemă; să fi fost şi sindromul "Problema 4"?). Scorul cel mai mare a fost 22/28. În mod necaracteristic, primele două locuri *ex-equo* au fost ocupate de doi elevi din Chişinău! (desigur, cei mai buni dintre elevii români au lipsit, dar totuşi ...); după corectură li s-a adăugat şi un român.

Subiect/Puncte	$7-6$	$5-4$	$3-2$	$1-0$
1	20	0	5	6
2	17	4	5	5
3	12	1	1	17
4	0	0	1	30

3. Încheiere

Enunţurile şi soluţiile "oficiale" au fost în fine postate trei zile mai târziu; un concurs nu devine educativ decât atunci când concurenţii, după ce au avut poate dificultăţi cu unele probleme, pot învăţa multe din soluţiile oficiale, care trebuie să fie un model de claritate, cu metode alternative şi trimiteri la alte rezultate teoretice. Rezultatele au apărut noaptea târziu, la

`http://www.scoala5calarasi.ro/barbilian.php`

dar nu şi pe site-ul SSMR (spre deosebire de anul trecut; bunele obiceiuri dispar la fel de repede cum au şi apărut, ca ciupercile înainte şi după ploaie). Mai mult, a doua zi a apărut o versiune "corectată", cu câteva schimbări spectaculoase de note ☺.

Este de o înduioşătoare ironie faptul că aceste materiale ale mele nu sunt citite tocmai de către cei care le-au stârnit. De acolo şi aluzia livrescă din *motto*; nu-mi rămâne decât satisfacţia lucrului bine-făcut, oricât de repetitiv şi lipsit de urmări. *Dixi, et salvavi animam meam.*