”OLIMPIADA” INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ ”FORMULA OF UNITY” / ”THE THIRD MILLENIUM” 2014/2015 – RUNDA A DOUA

Abstract. Comments on some of the problems presented at the ”new” integrated International Mathematical Olympiad ”Formula of Unity” / ”The Third Millenium”, 2014/2015, second round.

Data: 12 februarie 2015.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

We speak in tongues more numerous
than those of the Tower of Babel

0. Introducere

Aceste comentarii asupra **Olimpiadei Internaţionale de Matematică ”Formula of Unity” / ”The Third Millenium”**, 2014/2015, **runda a doua**, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Prezentare

Acest ”nou” eveniment, aflat la a treia ediţie, este se pare în continuarea unuia mai vechi, numit **”The Third Millenium”**. *De facto*, **”Formula of Unity”** este o traducere din expresia esperanto **”Formulo de Integreco”**, pe care, cred, grupul de lobby spaniol implicat l-a propus (deşi un robot de traducere oferă mai degrabă **”Formula of Integrity”**, ceea ce este oarecum comic ...). Limbile oficiale sunt rusa, engleza, spaniola şi esperanto!

[1]Adresele de Internet sunt

`http://formulo.org/`
`http://www.formulo.org/en/olimpiad/`

Ca de obicei, enunţurile (şi mai ales soluţiile oficiale) sunt de ne-găsit; nu am putut intra în posesia problemelor rundei a doua decât prin curtoazia lui Victor Ivrii, eminentul profesor de la Universitatea din Toronto care a fost implicat în desfăşurarea competiţiei în Canada! De aceea enunţurile au fost păstrate în limba engleză – dar soluţiile mele sunt date în limba română.

Lipsesc unele dintre probleme (şi în mod conspicuu, cele (puţine) de geometrie), la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Ordinea este dinspre clasa a XII-a către clasa a VI-a, căci (prea) multe probleme sunt reluate, uneori cu versiuni ”mai grele” la clasele mai mari. Rezultatele se vor lăsa încă (mult timp) aşteptate ...

Competiţia s-a desfăşurat în două etape. Prima – de calificare pentru cea de-a doua – a fost prin corespondenţă, acordându-se 3 săptămâni pentru rezolvarea problemelor postate pe site (şi a fost comentată în precedentul meu material); a doua s-a desfăşurat ”în timp real” între 7 şi 10 februarie 2015 (amânată din data iniţial anunţată de 1 februarie 2015), şi va conduce la acordarea de premii şi invitaţii la o tabără de vară de matematică, în Rusia. Au participat circa 65 de concurenţi din România ($10+5+7+5+5+20+13$, în ordine descendentă a claselor). Le urez la toţi succes în clasament, mai ales ţinând cont de subiectele uşoare ...

2. PROBLEMELE ”PASSE-PARTOUT” – **1**(IX-VI), **5**(XI-VI)

Subiectul (1). *There is a language having v vowels and c consonants. A vowel and a consonant (in any order) make a syllable, and any s syllables make a word. A word is called **funny** if it contains two consecutive identical letters. How many words W and funny words F are there in this language?*[2]

Soluţie. Evident există $2vc$ silabe (vc care încep cu o vocală şi cv care încep cu o consoană). Prin urmare $\boxed{W = (2vc)^s}$ (din câte văd, nu ni se impune nicăieri ca silabele care formează un cuvânt să fie diferite). Cuvinte care nu sunt ”funny” încep cu orice silabă, dar fiecare silabă următoare nu poate începe cu litera finală a silabei dinainte. Fie $N_k = V_k + C_k$ numărul de cuvinte, formate din k silabe, care nu sunt ”funny”, dintre care V_k se termină cu o vocală iar C_k se termină cu o consoană. Avem $V_1 = cv = vc = C_1$, şi $\left\{\begin{array}{lcl} V_{k+1} & = & cvV_k + (c-1)vC_k \\ C_{k+1} & = & (v-1)cV_k + vcC_k \end{array}\right.$ pentru $1 \leq k \leq s-1$. Matricea de transformare este $M = \begin{bmatrix} cv & (c-1)v \\ (v-1)c & vc \end{bmatrix}$, astfel încât $M\begin{bmatrix} V_k \\ C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{k+1} \\ C_{k+1} \end{bmatrix}$. Polinomul caracteristic verificat de M, dat de teorema Hamilton-Cayley, este $\lambda^2 - 2vc\lambda + vc(v+c-1) = 0$. Acesta este şi polinomul caracteristic al relaţiei de recurenţă pentru şirurile $(V_k)_{k\geq 1}$ şi $(C_k)_{k\geq 1}$, deci şi al şirului $(N_k)_{k\geq 1}$. Aşadar $N_k = \alpha\left(vc + \sqrt{vc(v-1)(c-1)}\right)^k + \beta\left(vc - \sqrt{vc(v-1)(c-1)}\right)^k$, unde coeficienţii α şi β se pot calcula din relaţiile pentru $k = 1$ şi $k = 2$. Iar finalmente, pentru $N = N_s$, vom avea $\boxed{F = W - N}$. Desigur, formulele complete sunt destul de complicate; metoda pentru valori mici ale lui s este să calculăm direct din relaţiile de recurenţă[3]

- $N_2 = vc(4vc - v - c + 1)$;
- $N_3 = 2(vc)^2(4vc - 2v - 2c + 1)$.

În problemele cu pricina, şi valorile pentru v şi c sunt mici, deci riscurile de eroare de calcul sunt minimizate. O problemă plicticoasă, în care singurul lucru interesant este tratarea cazului general (nu însă cerut) ... □

[2]Parcă ar fi limba japoneză, care este silabică, ha, ha; dar acolo silabele încep în principiu cu consoane sau semi-consoane.

[3]Nu garantez întrutotul acurateţea formulelor; e prea plicticos de re-verificat ...

Subiectul (5). *In the Flatworld there is an ocean and two islands which are convex polygons.* ***Coastal waters*** *is a part of the sea no more than* 50 *km away from the coastline. Can it happen that*

i) one island has a greater perimeter, while the other island has a greater area of the coastal waters?

ii) the perimeters of these islands are the same, while the areas of their coastal waters are different?

iii) one island has a greater area, while the other island has a greater area of the coastal waters?

The shortest distance between islands exceeds 50 *km.*

Soluţie. Mi-a luat mai mult timp să înţeleg enunţul decât mai apoi să rezolv problema. Linia de coastă este cea a fiecărei insule, iar zona apelor teritoriale ale unei insule este locul geometric al punctelor din apă aflate la o distanţă nu mai mare de $d = 50$ km de linia de coastă (adică de frontiera insulei).[4]

Este elementar şi evident că aria acestui loc geometric al apelor teritoriale este $A_t = Pd + \pi d^2$, unde P este perimetrul insulei, şi deci **nu** depinde de aria A a insulei.[5] Aceasta este cel mai uşor de văzut pentru un dreptunghi, apoi pentru un triunghi, în fine, pentru un poligon convex oarecare. Răspunsurile sunt atunci

i) $\boxed{\text{NU}}$. Dacă $P > P'$, atunci $A_t = Pd + \pi d^2 > P'd + \pi d^2 = A'_t$;

ii) $\boxed{\text{NU}}$. Dacă $P = P'$, atunci $A_t = Pd + \pi d^2 = P'd + \pi d^2 = A'_t$;

iii) $\boxed{\text{DA}}$. Dacă $A > A'$, este suficientă inegalitatea $P < P'$ pentru a avea $A_t = Pd + \pi d^2 < P'd + \pi d^2 = A'_t$; acest lucru este uşor realizabil, pentru că există figuri convexe de arie oricât de mică şi perimetru oricât de mare. □

3. Clasa a XII-a

Subiectul (1). *Positive integers a, b, c and d satisfy the equality*

$$2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d.$$

Is it possible that the numbers $a^{2015} + b^{2015}$ and $c^{2015} + d^{2015}$ are different?

Soluţie. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $a \leq b$, $c \leq d$ şi $a \leq c$. Atunci $1 + 2015^{b-a} = 2015^{c-a} + 2015^{d-a}$.

- Dacă $b = a$ atunci trebuie şi $c = a = d$;
- Dacă $b > a$ atunci trebuie $c = a$, de unde şi $d = b$.

În mod alternativ, se poate folosi unicitatea reprezentării unui număr întreg pozitiv într-o bază de numeraţie β, în particular $\beta = 2015$. Rezultă, în toată generalitatea, că $\min\{a, b\} = \min\{c, d\}$ şi $\max\{a, b\} = \max\{c, d\}$, deci răspunsul este $\boxed{\text{NU}}$. □

[4] Şi dacă este aşa, este tipic în mentalitatea rusească să nu se fi gândit să spună că distanţa cea mai scurtă dintre insule este mai mare decât $2d$, pentru a evita astfel eventuale conflicte teritoriale, ha, ha!

[5] Adevărat chiar şi pentru o insulă oarecare convexă, prin trecere la limită.

Subiectul (2). *How many* 5*-digit numbers are divisible by their last digit?*

Soluţie. Numărul n_d al numerelor de $n \geq 2$ cifre, divizibile prin ultima lor cifră d (evident $d \neq 0$, deci $1 \leq d \leq 9$), este

$$n_d = \left\lceil \frac{10^{n-1}\,\mathrm{c.m.m.d.c.}(10,d)}{d} \right\rceil - \left\lceil \frac{10^{n-2}\,\mathrm{c.m.m.d.c.}(10,d)}{d} \right\rceil .$$

Prin urmare numărul căutat (pentru $n = 5$) este, printr-un calcul plicticos, $\sum_{d=1}^{9} n_d = 9000+9000+3000+4500+9000+3000+1286+2250+1000 = \boxed{42036}$. Oare ce însemnătate au toate acestea? $\square$

Subiectul (4). *Each of* 10 *consecutive integers greater than* 1 *is decomposed into a product of prime factors. Let p be the greatest factor in all these decompositions. What is the minimal possible value of p?*

Soluţie. Dintre zece numere întregi consecutive mai mari decât 1, exact cinci sunt multipli de 2. Dintre celelalte cinci impare, cel mult două sunt multipli de 3, exact unul este multiplu de 5 şi cel mult unul este multiplu de 7. Va rămâne deci (cel puţin) unul care nu este multiplu de $2, 3, 5, 7$, deci este divizibil printr-un număr prim p cel puţin egal cu 11. Exemplul $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ arată că răspunsul este $\boxed{\min p = 11}$.

Acum vreo 10 ani am întâlnit aceeaşi problemă, propusă de Cipru pentru Balcaniada de Matematică, la care am preparat Lista Scurtă. Am eliminat această problemă, ca fiind prea trivială, şi prea slabă. Amintesc o celebră teoremă a lui Sylvester şi Schur.[6]

> If $n > k$, in the set of integers $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+k-1\}$ there is a number containing a prime divisor greater than k. If $n = k+1$, we obtain the well-known theorem of Chebyshev (postulatul lui Bertrand).

Pentru $n > k = 7$ aceasta implică existenţa unui divizor prim mai mare decât 7 al unuia dintre $\boxed{7}$ numere întregi pozitive mai mari decât 4 (cazurile $n = 5, 6, 7$ sunt evidente). La acel moment am obţinut, printr-o analiză detaliată, că printre oricare $\boxed{4}$ numere întregi pozitive mai mari decât 7 există unul având un factor prim mai mare decât 7. Continuând analiza, prin unele metode chiar mai puternice, am obţinut că singurele triplete de numere întregi pozitive mai mari decât 8 care nu au factori primi mai mari decât 7 sunt $\{14, 15, 16\}$ şi $\{48, 49, 50\}$. În fine, folosind teorema lui Kobayashi, am putut demonstra că nu există decât un număr **finit** de perechi de numere întregi pozitive mai mari decât 9 şi care nu au factori primi mai mari decât 7, de exemplu cele din tripletele de mai sus, dar şi $\{20, 21\}, \{24, 25\}, \{27, 28\}, \{35, 36\}, \{63, 64\}, \{80, 81\}$ sau $\{125, 126\}$. Nu ştiu care sunt ele toate ...

[6] `http://www.renyi.hu/~p_erdos/1934-01.pdf`

Problema este legată şi de conjectura lui Grimm.

> If $n+1, n+2, \ldots, n+k$ are all composite, there exist distinct primes p_{i_j} such that $p_{i_j} \mid n+j$ for $1 \leq j \leq k$ (conjectură încă ne-demonstrată).

Astfel, pentru $k = \boxed{5}$ şi $n \geq 7$, sau unul dintre cele cinci numere este prim, deci mai mare decât 7, sau toate sunt compuse, dar atunci unul dintre cele cinci numere prime p_{i_j} ar fi mai mare decât 7. □

Subiectul (6)**.** *Mark thought of a number m and counted the number of all diagonals of a convex m-gon. He obtained the number k. Then he counted the number of all diagonals of a convex k-gon and obtained the number* 2015.

Find the number m Mark thought of initially.

Soluţie. Numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi este, trivial, $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Aşadar $\dfrac{k(k-3)}{2} = 2015$, cu singura soluţie pozitivă $k = 65$. Şi apoi $\dfrac{m(m-3)}{2} = k = 65$, cu singura soluţie pozitivă $\boxed{m = 13}$.

Este de necrezut cum această problemă a fost aleasă ca ultima (cea mai grea?), la clasa cea mai mare! Ce o fi fost oare în mintea celor ce au construit concursul? □

4. Clasa a XI-a

Subiectele 1, 2, 3, 4 şi 6 au fost aceleaşi cu cele de la clasa a XII-a.

Subiectul (5)**.** *Subiectul "passe-partout" tratat la început, punctul i).* $\boxed{NU}$.

5. Clasa a X-a

Subiectele 1, 4, 5 şi 6 au fost aceleaşi cu cele de la clasa a XI-a.

Subiectul (2)**.** *One of the endpoints of a segment is blue, while the other is red. The segment is split by* 2015 *points, each being either red or blue, into* 2016 *parts. Can it happen that the number of parts with both ends blue equals the number of parts with both ends red?*

Soluţie. $\boxed{\text{NU}}$. Contează doar paritatea numărului $n = 2015$. Vom lua, în ordine, valorile $v_0, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ asociate capătului stâng al segmentului, apoi celor n puncte interioare, în fine, capătului drept al segmentului; unde $v_k = +1$ dacă punctul este albastru şi $v_k = -1$ dacă punctul este roşu, pentru $0 \leq k \leq n+1$. Vom asocia şi fiecăreia dintre cele $n+1$ părţi o pondere egală cu semi-suma valorilor asociate capetelor sale. Dar atunci suma ponderilor asociate părţilor este

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{v_k + v_{k+1}}{2} = \frac{v_0 + v_{n+1}}{2} + \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} v_k \equiv n \equiv 1 \pmod 2.$$

O parte cu capetele de aceeaşi culoare are asociată o pondere ± 1, iar o parte cu capetele de culori diferite are asociată ponderea 0. Înseamnă că suma ponderilor asociate părţilor cu capetele de aceeaşi culoare este impară, deci că numărul acestor părţi este impar; prin urmare nu pot fi la fel de multe cele cu ambele capete albastre ca şi cele cu ambele capete roşii.

Desigur, dacă n este par, cele două numere pot ajunge egale, de exemplu pentru secvenţa $+1, -1, +1, -1, \ldots, +1, -1, +1, -1$. La fel, pentru n impar, când capetele segmentului sunt colorate la fel, de exemplu pentru secvenţa $+1, -1, +1, -1, \ldots, -1, +1, -1, +1$. Dar pentru n par, atunci când capetele segmentului sunt colorate la fel, aceeaşi idee de mai sus arată că cele două numere nu pot fi egale. □

6. Clasa a IX-a

Subiectul (1)**.** *Subiectul "passe-partout" tratat la început, pentru valorile particulare $v = 3$, $c = 8$, $s = 3$.*

Soluţie. $\boxed{F = W - N = (2 \cdot 3 \cdot 8)^3 - 2(3 \cdot 8)^2(4 \cdot 3 \cdot 8 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 8 + 1) = 36504}$. □

Subiectul (2)**.** *Acelaşi cu Subiectul 2 de la clasa a X-a.*

Subiectul (4)**.** *Acelaşi cu Subiectul 1 de la clasa a X-a.*

Subiectul (5)**.** *Subiectul "passe-partout" tratat la început, punctul i), dar pentru triunghiuri.* $\boxed{NU}$.

Subiectul (6)**.** *Acelaşi cu Subiectul 6 de la clasa a X-a.*

7. Clasa a VIII-a

Subiectul (1)**.** *Subiectul "passe-partout" tratat la început, pentru valorile particulare $v = 3$, $c = 7$, $s = 3$.*

Soluţie. $\boxed{F = W - N = (2 \cdot 3 \cdot 7)^3 - 2(3 \cdot 7)^2(4 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 1) = 16758}$. □

Subiectul (2)**.** *Find an example of integers a and b such that*

$$(10a + b)(a + 10b)(a + b + 1) = 2015.$$

Soluţie. Deoarece $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, cei trei factori trebuie să fie co-primi. O rezolvare completă poate fi dusă până la capăt, dar este plicticoasă; se poate însă uşor "ghici" soluţia cu numere mici $\boxed{\{a, b\} = \{1, 3\}}$. □

Subiectul (4)**.** *Organizers plan to arrange a math tournament according to the following rules*

1) In each game three teams meet;
2) Each two teams meet exactly once.

Find the minimal number of teams required to organize the tournament consisting of more than one game.

Soluţie. Fie v numărul de echipe şi $b > 1$ numărul de meciuri, fiecare din ele implicând $k = 3$ echipe. Notăm şi $\lambda = 1$ (numărul de meciuri între două echipe). Condiţia de dublă numărare

$$\binom{v}{2} = \frac{v(v-1)}{2} = 3b = \binom{3}{2}b$$

nu apare suficient de fină, căci nu impune o condiţie asupra parităţii lui v.

Procedăm atunci puţin diferit. Dacă o echipă joacă în r meciuri, din condiţiile impuse rezultă $v - 1 = 2r$, deci v este impar, iar $r = (v-1)/2$ este acelaşi pentru fiecare echipă. Prin urmare trebuie să existe un BIBD (Balanced Incomplete Block Design) (v, b, r, k, λ), care trebuie să respecte impoziţia $v(v-1) = 6b$. Cea mai mică valoare impară a lui v pentru care b este un întreg pozitiv mai mare decât 1 este $\boxed{v = 7}$, pentru care şi $b = 7$, deci avem de-a face cu un BIBD $(7, 3, 1)$ simetric. Într-adevăr (şi acest fapt **trebuie** neapărat verificat, căci impoziţia este doar necesară, nu şi neapărat suficientă), există un astfel de obiect; şi este unul faimos, numit şi plan proiectiv finit de ordin 2 (planul, sau configuraţia Fano), sau triplet Steiner. Modelul poate fi prezentat prin matricea

Echipe/Meciuri	1	2	3	4	5	6	7
A	•	•	•				
B	•			•	•		
C	•					•	•
D		•		•		•	
E		•			•		•
F			•	•			•
G			•		•	•	

Următoarea valoare este $v = 9$, pentru care $b = 12$. Într-adevăr (şi acest fapt trebuie neapărat şi el verificat), există un BIBD $(9, 12, 4, 3, 1)$; şi acesta este un obiect faimos, anume planul afin finit de ordin 3, şi el un triplet Steiner. Din cele de mai sus, singura impoziţie este $v \equiv 1, 3 \pmod 6$ (următoarele valori vor fi $v = 13, 15, 19, 21, \ldots$). Kirkman a fost primul care a demonstrat în 1847 că această impoziţie este şi suficientă, adică triplete Steiner STS(v) există pentru **toate** aceste valori ale lui v (deci temerile noastre erau de fapt nejustificate).

De departe singura problemă mai interesantă (împreună poate cu doar comentariile extinse de la Problema 4, clasa a XII-a); din păcate însă destul de răsuflată şi obosită ... □

Subiectul (5)**.** *Subiectul "passe-partout" tratat la început, punctul ii), dar pentru triunghiuri.* $\boxed{NU}$.

Subiectul (6)**.** *Un joc între două persoane, implicând ştergerea de laturi şi diagonale ale unui poligon cu 2015 laturi. Îmi rezerv deocamdată opinia.*

8. Clasa a VII-a

Subiectul (1). *Subiectul "passe-partout" tratat la început, pentru valorile particulare $v = 5$, $c = 7$.* $\boxed{W = (2 \cdot 5 \cdot 7)^2 = 4900}$.

Subiectul (2). *Find an example of integers a and b such that*

$$ab(2a + b) = 2015.$$

Soluţie. Deoarece $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, cei trei factori trebuie să fie co-primi. Singurele posibilităţi sunt $\boxed{(a, b) \in \{(13, 5)(13, -31)\}}$, ceea ce se obţine prin analiza câtorva puţine cazuri.

Foarte interesant; să se ceară **doar** un exemplu, când rezolvarea completă este atât de elementară ... Cel puţin la cealaltă problemă asemănătoare ar fi fost mai mult de lucru până a ajunge la caracterizarea completă a soluţiilor. □

Subiectul (4). *Six students planted five trees at the school yard. Can it happen that every student planted the same number of trees, while every tree was planted by the a different number of students?*

Soluţie. Suma celor 5 numere diferite de studenţi (care au plantat cei 5 copaci) este cel puţin $1+2+3+4+5 = 15$ (vom presupune că niciun copac nu s-a plantat singur! şi deci fiecare dintre aceste numere este nenul) şi cel mult $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$, iar pe de altă parte, un multiplu de 6, deci va trebui să fie 18. Singura posibilitate este $1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 18$.[7] Modelul poate fi prezentat prin matricea "Studenţi × Copaci"

Studenţi/Copaci	1	2	4	5	6
A			•	•	•
B			•	•	•
C			•	•	•
D			•	•	•
E		•		•	•
F	•	•			•

O întrebare puţin insidioasă, din moment ce are o soluţie unică ... □

Subiectul (5). *Subiectul "passe-partout" tratat la început, punctul i), dar pentru dreptunghiuri.* $\boxed{NU}$.

Subiectul (6). *Dima cooks porridge. The recipe requires to cook it for 24 minutes. Dima has the 20-minute and the 7-minute hourglasses. How can he measure 24 minutes precisely?*

[7] Dacă totuşi decidem să admitem şi numere zero, vor mai exista şi cazurile suplimentare $0+3+4+5+6 = 18$, $0+1+2+3+6 = 12$ şi $0+1+2+4+5 = 12$, cu modele corespunzătoare.

Soluţie. Vom nota perechea de clepsidre cu $(C_1(c_1), C_2(c_2))$, de capacităţi $c_1 = 20$ şi $c_2 = 7$, vom nota cu $C_i(x \to c_i - x)$ faptul că am "răsturnat" o clepsidră care mai avea de măsurat timpul x, şi cu $\xrightarrow{t'}$ faptul că au trecut t minute până ce o clepsidră s-a golit. Începem prin secvenţa

$$(C_1(20), C_2(7)) \xrightarrow{7'} (C_1(13), C_2(0 \to 7)) \xrightarrow{7'} (C_1(6), C_2(0 \to 7)) \xrightarrow{6'} (C_1(0 \to 20), C_2(1)),$$

astfel încât am măsurat până acum $20'$, şi una din clepsidre a ajuns să măsoare $1'$. De acum, putem măsura orice timp în minute întregi, căci

$$(C_1(0 \to 20), C_2(1)) \xrightarrow{1'} (C_1(19 \to 1), C_2(0 \to 7)) \xrightarrow{1'} (C_1(0 \to 20), C_2(6 \to 1)) \xrightarrow{1'} \cdots$$

şi astfel în încă patru paşi ajungem să fi măsurat $24'$. □

9. Clasa a VI-a

Subiectul (1). *Subiectul "passe-partout" tratat la început, pentru valorile particulare $v = 3$, $c = 5$.* $\boxed{W = (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 900}$.

Subiectul (2). *Acelaşi cu Subiectul 2 de la clasa a VII-a.*

Subiectul (4). *Acelaşi cu Subiectul 4 de la clasa a VII-a.*

Subiectul (5). *Subiectul "passe-partout" tratat la început, punctul iii), dar pentru dreptunghiuri.* $\boxed{DA}$.

Subiectul (6). *Anna, Gala, Diana, Sophie and Liz met at the "Formulo de Integreco" camp. All of them came from different cities: A, B, C, D and E. During the introduction meeting, girls told about themselves the following items of information. Neither Sophie nor Diana have ever been in A. Both Gala and Sophie met the girl from B at the camp last year. Anna and Sophie exchanged souvenirs with the girl from C. Gala and Sophie helped the girl from D to carry her suitcase. Gala, Liz and the girl from C sometime chat by Skype. The girl from B and Anna are penpals. Which city is every girl from?*

Soluţie. După metoda bine-cunoscută de a rezolva astfel de probleme de logică, de tip Smith-Jones-Robinson, construim matricea "Nume × Oraşe"

Nume/Oraşe	A	B	C	D	E
Anna	3	6	3	**5**	1
Gala	**3**	2	5	4	1
Diana	1	2	**2**	2	1
Sophie	1	2	3	4	**1**
Liz	3	**4**	5	4	1

unde cifrele n în negru reprezintă interdicţiile reprezentate de condiţiile impuse (în ordinea enumerării lor), cifrele **n** în roşu reprezintă localizările forţate (în ordinea apariţiei lor), iar cifrele n în roşu reprezintă interdicţiile reprezentate de aceste localizări (tot în ordinea apariţiei lor). □

10. Încheiere

Booooring ... We are not amused zicea Regina Victoria; we're not in Kansas anymore zicea Dorothy (păi, bine'nţeles, nu? doar suntem la Sankt Petersburg, sau whereabouts). Extrem de multe probleme au fost repetate, peste multe clase, uneori în variante irelevante. Este neplăcută la vedere lenea compunătorilor ruşi, care nu s-au străduit să ajungă la probleme mai potrivite clasei la care sunt date, şi şi-au împrumutat din propriul buzunar probleme lipsite de orice pertinenţă pentru clasa cu pricina. Iar dificultatea generală este probabil sub nivelul Olimpiadei noastre, faza locală, care va să vină în chiar scurt timp. Pentru faza finală a unui concurs internaţional, urmată de festivităţi, premii, medalii şi invitaţii în tabere – cam subţire!