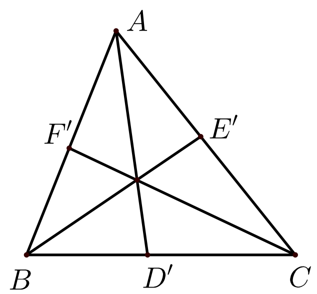
Problema 3. În triunghiul ABC notăm cu D, E, F mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB şi cu D', E', F' punctele în care bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A, \sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ intersectează laturile BC, CA, respectiv AB.

Dacă $DD' = EE' = FF'$, arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

***

Soluţie. Notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ şi presupunem că $a \geqslant b \geqslant c$. Folosind teorema bisectoarei, obţinem:



$AE' = \dfrac{bc}{a+c}$, $AF' = \dfrac{bc}{a+b}$ şi $BD' = \dfrac{ac}{b+c}$.

Ţinând cont că, în orice triunghi, bisectoarea se află între înălţimea şi mediana duse din acelaşi vârf, avem $DD' = BD - BD'$, de unde obţinem $DD' = \dfrac{a}{2} - \dfrac{ac}{b+c} = \dfrac{ab-ac}{2(b+c)}$. La fel găsim $EE' = AE - AE' = \dfrac{ab-bc}{2(a+c)}$ şi $FF' = AF - AF' = \dfrac{ac-bc}{2(a+b)}$.

Ipoteza $FF' = EE'$ conduce la egalitatea $(b-c)(a^2+ab+ac-bc) = 0$. Cum $a^2 \geqslant bc$, obţinem $b = c$ şi atunci $D = D'$. Rezultă $EE' = FF' = 0$, adică $E = E'$ şi $F = F'$. Acum este evident că triunghiul ABC este echilateral.