Problema 3. Se consideră numerele complexe x, y, z.

a) Demonstraţi că $|x|+|y|+|z| \leqslant |x+y+z| + \frac{2}{3}(|x-y|+|y-z|+|z-x|)$.

b) Determinaţi tripletele de numere complexe (x, y, z) cu proprietatea că:

$$|x| = |y| = |z| \quad \text{şi} \quad |x|+|y|+|z| = |x+y+z| + \frac{2}{3}(|x-y|+|y-z|+|z-x|).$$

* * *

Soluţie. a) $|x+y+z|+|x-y|+|z-x| \geqslant |2x+z|+|x-z| \geqslant |3x|$, aşadar avem:

$$|x+y+z|+|x-y|+|z-x| \geqslant 3|x|. \tag{1}$$

Analog obţinem inegalităţile:

$$|x+y+z|+|y-z|+|x-y| \geqslant 3|y|, \tag{2}$$

$$|x+y+z|+|z-x|+|y-z| \geqslant 3|z|. \tag{3}$$

Adunând inegalităţile (1), (2) şi (3), rezultă concluzia.

b) Dacă cel puţin două dintre numerele x, y, z sunt distincte, rezultă că $|x| = |y| = |z| \neq 0$.

Egalitatea are loc în inegalitatea de la a) dacă şi numai dacă inegalităţile (1), (2) şi (3) devin egalităţi.

Egalitatea are loc în (1) dacă şi numai dacă există $a, b \in [0, \infty)$, astfel încât $x+y+z = a(x-y)$ (4) şi $2x+z = b(x-z)$. (5)

Din (5) obţinem $(1+b)z = (b-2)x$. Trecând la module, deducem că $1+b = |b-2|$, deci $b+1 = 2-b$, aşadar $b = \frac{1}{2}$. Din (5) rezultă că $z = -x$. Înlocuind în (4), deducem că $(a+1)y = ax$ şi trecând la module, obţinem $a+1 = a$, fals. Aşadar $x = y = z$, pentru care egalitatea din enunţ este adevărată. Soluţia este: $S = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{C}\}$.