Comentarii la a 31-a Balcaniadă de Matematică
BMO 2014, Pleven – Bulgaria

Abstract. Comments on the problems of the 31st BMO (the Balkan Mathematical Olympiad), Pleven – Bulgaria, May 2–7, 2014.

Data: 6 mai 2014, Yom Ha'atzmaut.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere şi Conţinut

Această prezentare, însoţită de comentarii asupra celei de a 31-a BMO (Balcaniada de Matematică), Pleven – Bulgaria, 2–7 mai 2014, este după un acum vechi şi cunoscut tabiet, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

Subiectul (1). *Fie $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $xy + yz + zx = 3xyz$. Demonstraţi că*

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3$$

şi determinaţi cazurile de egalitate.

UK – David Monk

Soluţie. Inegalitate extrem de slabă, căci "se sparge". Avem din AM-GM

$$\sum_{cyc} x^2y + 3 = \sum_{cyc} x^2y + \sum \frac{1}{x} = \sum_{cyc} \left(x^2y + \frac{1}{y}\right) \geq \sum 2x = 2\sum x.$$

Alternativ, din (versiunea Titu a inegalităţii) Cauchy-Schwarz

$$\sum_{cyc} x^2y = \sum \frac{x^2}{1/y} \geq \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum(1/y)} = \frac{\left(\sum x\right)^2}{3} \geq 2\sum x - 3,$$

căci echivalent cu $\left(\sum x - 3\right)^2 \geq 0$. Condiţia de egalitate apare imediat ca fiind $x = y = z = 1$. Singurul ingredient necesar este rescrierea condiţiei (după împărţire prin xyz) ca $\sum 1/x = 3$ (şi cu $\sum 1/x \leq 3$ era suficient).

Se vede uşor raţiunea pentru care variabilele nu sunt admise a putea fi şi nule. Dacă, să zicem, $x = 0$, atunci condiţia se scrie $yz = 0$, forţând, să zicem, $y = 0$, dar inegalitatea devine $2z \leq 3$, limitând valorile lui z. □

Mulţumirile mele sincere celor cu care am dialogat cu privire la problemele propuse, sau ale căror soluţii (păstrate şi editate în original în limba engleză) le-am împrumutat de pe acest site esenţial care este AoPS – lucruri care au condus la materialul de faţă.

[1]Subiecte, soluţii şi rezultate la `http://www.bmo2014.eu/`. Pentru detalii, daţi un ☎

Soluţie Alternativă. (Aleksandar Bulj – AoPS) Actually, a much sharper, harder and handsome inequality holds. For $a, b, c > 0$ such that $a+b+c = 3$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

At first glance it may not be obvious how is it related to the given inequality, but if we denote $x = \dfrac{1}{a}$, $y = \dfrac{1}{b}$ and $z = \dfrac{1}{c}$, the condition becomes $a+b+c = 3$ and the inequality is equivalent to

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3abc \geq 2(ab + bc + ca).$$

So it remains to prove $a^2 + b^2 + c^2 + 3abc \geq 2(ab + bc + ca)$, which after homogenization becomes $a^2+b^2+c^2+\dfrac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$. But that is just Schur's inequality of degree 3. $\square$

Remarcă. O inegalitate prea uşoară, chiar pentru o Problemă 1 la BMO.

Subiectul (2)**.** *Un număr **special** este un număr natural nenul n pentru care există numere naturale nenule a, b, c şi d astfel încât*

$$n = \frac{a^3 + 2b^3}{c^3 + 2d^3}.$$

Demonstraţi că

i) există infinit de multe numere speciale;
ii) 2014 nu este un număr special.

ROMÂNIA – ???

Soluţie. Punctul i) este ridicul prin trivialitatea sa; luând în mod arbitrar $c, d, k \in \mathbb{N}^*$ şi $a = kc$, $b = kd$, obţinem $\dfrac{a^3 + 2b^3}{c^3 + 2d^3} = k^3$, deci toate cuburile perfecte nenule $n = k^3$ sunt speciale. La fel de simplu este să luăm $c = d = 1$ şi $a \equiv b \pmod 3$.

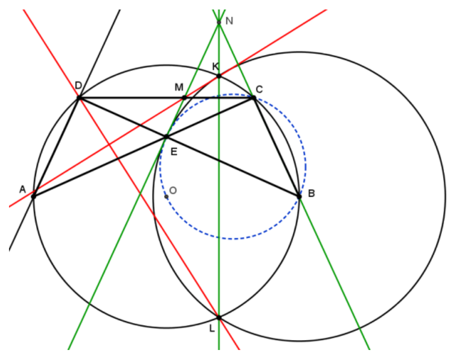
ii) Egalitatea $a^3 + 2b^3 = 2014(c^3 + 2d^3) = 2 \cdot 19 \cdot 53(c^3 + 2d^3)$ nu poate avea loc. Din $19 \mid x^3 + 2y^3$ rezultă $x \equiv y \equiv 0 \pmod{19}$, căci resturile cubice modulo 19 sunt $\{0, \pm1, \pm7, \pm8\}$, deci -2 nu este rest cubic modulo 19. Dar atunci rezultă $a \equiv b \equiv 0 \pmod{19}$, deci $c \equiv d \equiv 0 \pmod{19}$, şi un raţionament de coborâre infinită pune în evidenţă contradicţia. Motivaţia raţiunii de a lucra cu 19 şi nu cu 53 constă în faptul că $3 \mid 19 - 1$, dar $3 \nmid 53 - 1$; considerând un generator g al lui $(\mathbb{F}_p^*, \cdot)$, unde $p \not\equiv 1 \pmod 3$ este prim, orice reziduu modulo p rezultă rest cubic, deci 53 nu convine. $\square$

Remarcă. Problema este bazată pe coincidenţa că -2 nu este rest cubic modulo 19; la fel de bine ar fi putut fi folosită în loc de 2 o valoare din $\{\pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm9\}$. Problema este artificială, particulară, şi eminamente banală din multe puncte de vedere. Şi nu este nici prea chinuitor de grea ...

Subiectul (3)**.** *Fie $ABCD$ un trapez înscris în cercul Γ de diametru AB. Fie E punctul de intersecţie a diagonalelor AC şi BD. Cercul de centru B şi rază BE intersectează cercul Γ în punctele K şi L, unde K se află de aceeaşi parte a dreptei AB cu C. Perpendiculara în E pe BD intersectează CD în punctul M. Demonstraţi că dreptele KM şi DL sunt perpendiculare.*

GRECIA – Silouanos Brazitikos

Soluţie. (AoPS, Laurenţiu Ploscaru – în concurs, şi Dinu Şerbănescu) Fie cercul Ω de centru B şi rază BE, şi fie şi cercul ω de diametru BE. Dreapta ME este tangentă la ambele, deci este axa lor radicală. Avem şi KL axă radicală a cercurilor Γ şi Ω, iar BC axă radicală a cercurilor Γ şi ω. Cele trei axe radicale sunt concurente în punctul N (centrul radical al celor trei cercuri). Deoarece AD şi ME sunt paralele, iar $ABCD$ este trapez isoscel, rezultă că MNC este triunghi isoscel, deci M este simetricul lui C faţă de KL. Dar în triunghiul DKL înălţimea DM din D intersectează cercul circumscris Γ în C, prin urmare M este ortocentrul triunghiului DKL. $\square$



Curtoazie `http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=206825#p206825`.

Soluţii Alternative. Soluţii calculatorii, relativ scurte şi "straightforward", au fost date pe AoPS, printre alţii – de Ştefan Tudose. Toate demonstrează acelaşi fapt crucial, anume că M este ortocentrul triunghiului DKL. $\square$

Remarcă. O problemă curată, cu soluţii sintetice tipice, care sucumbă însă rapid şi la atacuri calculatorii. Mai potrivită poate – ca Problemă 2. Însă precizarea poziţiilor relative ale punctelor K şi L este cu totul ne-necesară, din moment ce rezultă atât $KM \perp DL$ cât şi $LM \perp DK$. Poate că s-a considerat că ambele relaţii – împreună – ar facilita înţelegerea configuraţiei?

Subiectul (4)**.** *Fie n un număr natural nenul. Un hexagon regulat de latură n este partiţionat în triunghiuri echilaterale de latură 1 prin drepte paralele la laturile sale. Calculaţi numărul de hexagoane regulate formate de vârfuri ale acestor triunghiuri echilaterale.*

UK – Sahl Khan

Soluţie. (Palmer Mebane – AoPS) The value n^3 is correct if one assumes the hexagon edges are parallel to the sides of the original figure, but the problem **does not** make this assumption.

Consider some arbitrary hexagon. If its centre is P and A, B, C are three consecutive vertices, then $ABCP$ is a parallelogram. Since A, B, C all have vertices among the equilateral triangles, we conclude P must as well. We can therefore count hexagons by their centre point.

Label every vertex P of a triangle with the number k, where k is the minimum number of equilateral triangle edges one must travel on to get from any edge vertex to P (so e.g. all vertices on the edge get labelled 0). Then we can draw a 60° angle out from P along the gridlines so that all vertices contained in this angle are those we might have travelled on in the minimum length path.

A hexagon centred at P either has exactly one vertex contained in the interior angle or two vertices on its boundaries. If P's label is k, the number of points in the interior is $\binom{k}{2}$, and the number of points on one boundary is k. So there are $\binom{k+1}{2}$ hexagons centred at P. These hexagons are all valid by the fact that k is the minimum path length to P; if one of the hexagons we constructed had an invalid vertex, we could construct a shorter path from the edge to P. To finish the problem, we need only sum up the value of $\binom{k+1}{2}$ for each vertex we labelled with k.

We assigned the centre of the hexagon the label n, and the points assigned the label $n-k$ are those lying on the edges of a regular hexagon of side length k concentric with the original hexagon. There are $6k$ such points, thus the total is

$$\binom{n+1}{2} + 6\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1}\binom{n-k+1}{2}.$$

The sum is another way of counting the number of 4-element subsets of $\{0, 1, 2, \ldots, n+1\}$, with the k we are summing-over being the second element of the subset. So that sum is equal to $\binom{n+2}{4}$ and the above simplifies to

$$\binom{n+1}{2} + 6\binom{n+2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(This is also the sum of the first n cubes, but I'm not confident there's a nice bijection to that.) □

Soluţie Alternativă. (Sketch – AoPS) The starting point (as above) is that the centre of any hexagon is a point among the vertices of the equilateral triangles. Let $ABCDEF$ be the initial hexagon, and $AB_1C_1D_1E_1F_1$ be the hexagon inside $ABCDEF$, with sides of length $n-1$ parallel to those of $ABCDEF$.

Let $f(n)$ be the number of such regular hexagons. We will prove that $f(n) - f(n-1) = n^3$. The number of hexagons having sides parallel to the sides of an initial hexagon of side k is easily computed to be k^3.

Then it follows by the above the number of hexagons having sides parallel to the sides of the initial hexagon and at least one vertex lying outside of $AB_1C_1D_1E_1F_1$ will be $n^3 - (n-1)^3$ (in fact, this number is the n-th *centered hexagonal number*).

We can then (possibly ?!?) establish a bijection between hexagons having sides non-parallel to those of the initial hexagon and at least one vertex lying outside of $AB_1C_1D_1E_1F_1$, and hexagons having sides parallel to those of the initial hexagon and all vertices lying inside of $AB_1C_1D_1E_1F_1$, which by the above are $(n-1)^3$ in number.

From all of what has been said it follows $f(n) - f(n-1) = n^3$ (where we count $f(n)$ for $ABCDEF$ and $f(n-1)$ for $AB_1C_1D_1E_1F_1$), hence

$$f(n) = n^3 + (n-1)^3 + \cdots + 1^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(Soluţia oficială oferă o a treia metodă, foarte interesantă şi ea.) □

Remarcă. Evident, singura chestiune care a ridicat unele probleme, printre care identificarea faptului că hexagoanele de numărat nu trebuie în mod necesar să aibă laturile paralele cu cele ale hexagonului iniţial (chiar şi unul dintre concurenţii români a căzut în această capcană). Altfel, mulţi concurenţi vor fi obţinut scor maxim pe primele trei subiecte, deci acesta va fi subiectul de departajare – singurul, ca în multe BMO şi jBMO recente.

Cerinţa similară în laticea pătrată se enunţă astfel

> Fie n un număr natural nenul. Un pătrat de latură n este partiţionat în pătrăţele de latură 1 prin drepte paralele la laturile sale. Calculaţi numărul de pătrate formate de vârfuri ale acestor pătrăţele.

Rezultatul este cunoscut în literatură (în principiu mai uşor de calculat decât pentru laticea triunghiulară din problema de mai sus, deşi folosind metode asemănătoare), şi este $\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$. Posibil că aceasta a fost sursa de inspiraţie a autorului.[2] Motivul pentru care se numără hexagoane (respectiv pătrate) este pentru că acestea sunt singurele poligoane regulate posibile în laticele respective (desigur, în laticea triunghiulară vor exista şi triunghiuri echilaterale, dar numărarea lor este mai uşoară). În aceeaşi ordine de idei, să ne amintim şi de Problema 3 de la jBMO 2011, cu o numărare de acelaşi tip (romburi într-o latice triunghiulară), dar, de înţeles, mai uşor de calculat.

2. Încheiere

Cu această ocazie, site-ul oficial bulgar a fost la înălţime în sarcina de a disemina informaţiile concursului. Iar web-master a aplicat cu celeritate corecţiile necesare – semnalate de mine, nu ca în multe alte ocazii trecute, când site-ul era parcă gestionat de fantome! Enunţurile au apărut în scurt timp, iar soluţiile oficiale – o zi mai târziu. Rezultatele finale au apărut pe 5 mai, spre ora 22:00, chiar în ziua premergătoare festivităţii de închidere.[3]

Un concurs curăţel, dar trist în banalitatea sa, alcătuit dintr-o inegalitate extrem de simplă, o teoria numerelor relativ insipidă (şi uşoară), o geometrie destul de cinstită, şi un climax combinatoric mai dificil. Nu chiar cel mai greu de digerat festin (pre)gătit în ultimii ani! Din păcate efectul asupra rezultatelor competiţiei a fost pernicios. Prea multe scoruri maxime – nu? reminiscent de BMO 2012 şi unele jBMO recente. Mai multă rigoare, atenţie şi cenzură la compoziţia examenului cad mai ales în sarcina leader-ilor (şi observatorilor) din ţările membre "puternice", care nu trebuie să lase competiţia să se dilueze în acest hal (este suficient să ne uităm la selecţia problemelor de la cele trei EGMO, ca să înţelegem despre ce este vorba) ☹

Au participat 10 dintre cele 11 ţări membre (Bosnia şi Herţegovina lipseşte deseori de la Balcaniada de Seniori), precum şi alte 9 ţări invitate, plus echipa B a ţării gazdă. Rezultatele echipei noastre la BMO 2014, Bulgaria, sunt, cu felicitările de rigoare!

[2] De altfel, unul dintre materialele din literatură chiar menţionează ideea acestui calcul; vezi `http://math.bard.edu/student/pdfs/Mariya-Mitkova.pdf`, pagina 35.

Vezi şi Duane DeTemple `http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/`, pagina 4.

[3] Şi comunitatea de useri de pe AoPS (`www.mathlinks.ro`) a reuşit să fie extrem de rapidă, atât în afişarea enunţurilor, cât şi în oferta de soluţii.

Cătălin Liviu GHERGHE		Bucureşti		Leader
Marius MÂINEA		Găeşti		Deputy
Radu Nicolae GOLOGAN		Bucureşti		Observer A
Nume		**Şcoala**	**Puncte**	**Medalie**
Ştefan SPĂTARU	XI	ICHB, Bucureşti	**40**	**Aur**
Paul Gabriel MUSCĂ	XII	ICHB, Bucureşti	34	Argint
Marius Ioan BOCANU	XI	ICHB, Bucureşti	34	Argint
Teodor Andrei ANDRONACHE	X	ICHB, Bucureşti	28	Bronz
Viorel Andrei BUD	XII	ICHB, Bucureşti	33	Argint
Ioan Laurenţiu PLOSCARU	X	C.N. A. Lahovari, Rm. Vâlcea	**40**	**Aur**
Echipa României			**209/240**	**1/10 + (10)**

Punctajul detaliat pe probleme este

Nume	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**Total**	**Medalie**
Ştefan SPĂTARU	10	10	10	10	**40**	**Aur**
Paul MUSCĂ	10	10	10	4	34	Argint
Marius BOCANU	10	10	10	4	34	Argint
Andrei ANDRONACHE	5	10	10	3	28	Bronz
Viorel BUD	9	10	10	4	33	Argint
Laurenţiu PLOSCARU	10	10	10	10	**40**	**Aur**
Echipa României	**54**	**60**	**60**	**35**	**209/240**	**1/10 + (10)**

Ca şi în cazul jBMO, odată cu trecerea anilor, gradul de dificultate al acestei competiţii scade.[4] Problemele propuse de România devin mai rare (şi de o calitate îndoielnică), dacă nu chiar spre dispariţie; Lista Scurtă de probleme este sărăcuţă, etc. Noroc cu ţările invitate (multe probleme alese dintre cele propuse din UK).[5] ☻

Câteva comentarii finale. Cinci dintre participanţii din România sunt de la ICHB (Liceul Internaţional de Informatică din Bucureşti), unde mă simt onorat să îi întâlnesc (aproape) săptămânal, cu ocazia prelegerilor mele de combinatorică (şi nu numai); dar şi cu Laurenţiu lucrez către pregătirea sa.

[4]S-a mai întâmplat şi altădată (dar, din fericire, rar) ca numai punctajele maxime să beneficieze de medalie de Aur! Au fost nu mai puţin de 9 anul acesta. Nu este bine aşa.

[5]Anul trecut, domnul Mâinea menţinea pe contul său Facebook o situaţie oră-cu-oră a rezultatelor coordonării, cu scenarii mai mult sau mai puţin fanteziste (nu zic că **trebuia**, sau era bine să facă aceasta); mai blazat între timp, doar comunicatul oficial de presă al SSMR (a cărui critică apare separat) a fost găzduit şi aici, *ex post facto*. Iar poza cu cocarda – să zici că-i G(aribaldi), nu alta. Aşa că nu am mai avut ştiri despre potenţialele rezultate decât prin gentilele comunicări personale venite de la unul dintre concurenţi.

Ştefan Spătaru şi **Laurenţiu Ploscaru** au obţinut punctaj maxim; bravo! Aproape toţi cei şase concurenţi români au avut punctaj maxim pe primele trei probleme (ceea ce arată gradul lor relativ scăzut de dificultate). Prin urmare, tot concursul, pentru toată lumea, "a stat" în ... problema 4. S-au acordat 9 medalii de Aur (40 puncte, 8%), 19 medalii de Argint ($39-33$ puncte, 17%) şi 44 medalii de Bronz ($32-19$ puncte, 40%), relativ la un total de $58+(52) = 110$ participanţi, din $10+(10) = 20$ echipe (19 ţări). **România** (209 puncte) a terminat pe locul 3 în clasamentul (neoficial) pe naţiuni, în urma **Turciei** (214 puncte) şi a Bulgariei (211 puncte), urmată de Serbia (187 puncte) şi Grecia (182 puncte). Urmează (Kazahstan) (181 puncte) şi (Italia) (159 puncte), ambele dintre ţările invitate. Deşi **România** pornea din blocstart net favorită, omogenitatea celorlalte două echipe a contat mai mult (de remarcat, **Turcia** cu 1 medalie de Aur şi Bulgaria cu niciuna! dar **România** cu 2, Serbia cu **3** şi Grecia cu 2).[6]

Nu mă pot abţine de la un (ultim – jur) comentariu asupra comunicatului oficial de presă de pe `http://ssmr.ro/comunicate_presa/BMO_2014`, care păcătuieşte din mai multe aspecte. În calitate de document remis presei din partea asociaţiei profesionale matematice din România, ar trebui să fie fără reproş şi fără prihană – în precizia informării, ca şi în forma sa lingvistică.

• La BMO au participat echipe formate din câte 6 elevi din ... este incorect; au fost doar 4 din Muntenegru, 4 din Kirgizstan, 5 din Tadjikistan şi 1 din Uzbekistan (altfel nu iese din condei $6\times 20 = 120 \neq 110$ participanţi).

• Azerbaijan, Kazakhstan, Tajikistan, sunt scrierea în limba engleză; în limba română se scrie predominant Azerbaidjan, Kazahstan, Tadjikistan.

• Mai aproape de casă, nu Rămnicu, ci Râmnicu Vâlcea, şi nu Găieşti, ci Găeşti. În cea mai mare parte semnele diacritice sunt prezente, dar nu peste tot; de trei ori Scoala în loc de Şcoala, şi odată Romania în loc de România (şi asta chiar în denumirea SSMR!).

• Văd că nu s-a renunţat la ideea nefericită de a menţiona "provenit de la ..." (parcă suna mai bine "originar din ...", ca anul trecut), deşi se oferă de data aceasta o motivaţie a menţionării provenienţei. Intenţia este călduroasă, dar se putea face altfel, prin listarea numelor profesorilor care au contribuit, în trecut, la formarea acestor copii, fără referinţe la localitatea de origine. Oare unui student la Harvard i se tot reaminteşte că vine din Ho Chi Minh City? Sau lui Abraham Lincoln - în timpul vieţii - că era născut într-o "one-room log cabin in Kentucky"? Anul trecut spuneam "noi toţi provenim de undeva, de mult, din Africa ...".

• Pe de altă parte, notez cu satisfacţie (şi o oarecare uimire) afirmaţia "... pe lângă pregătirea de excepţie pentru concursuri, pe care o fac la Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti ...", ca prim pas de reconciliere şi acceptare a evidenţei (*personnellement, je m'en passe*).

• În fine, anţărţ[7] comunicatul demara "Romania pe locul I la Olimpiada Balcanica de Matematica desfasurata in Cipru" (fără diacritice *sic!*), cu mai apoi "... castigatoare detasata ..." şi "... pe primul loc la mare distanta ...". Oare locul III de anul acesta este atât de ruşinos că trebuie ţinut sub obroc?

[6] Reamintesc – subiectele, soluţiile oficiale şi rezultatele complete pot fi consultate acum la `http://www.bmo2014.eu/` (lipsesc doar baremele de coordonare, ca de obicei).

[7] Ştiu prea bine că înseamnă "acum doi ani" (*anno tertio*), dar sună prea frumos ... ☺