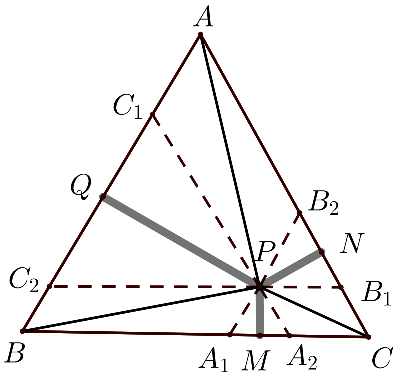
Problema 2
Etapa 2
Clasa a IX-a

Problema 2. Se consideră punctul P situat în interiorul triunghiului echilateral ABC de centru O. Notăm cu M, N şi Q proiecţiile lui P pe laturile triunghiului ABC. Demonstraţi că $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$.

***

Soluţie. Ducem prin P paralele la laturile ΔABC, ca în figură.



Triunghiul PA_1A_2 este echilateral şi $PM \perp BC$, deci PM este mediană în triunghiul PA_1A_2. Rezultă $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}\right)$. În mod similar se obţin relaţiile $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PB_2}\right)$ şi $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC_1}+\overrightarrow{PC_2}\right)$. Adunând aceste trei egalităţi, obţinem

$$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{PB_2}+\overrightarrow{PC_1}\right)+\left(\overrightarrow{PC_2}+\overrightarrow{PA_1}\right)+\left(\overrightarrow{PA_2}+\overrightarrow{PB_1}\right)\right],\ (1).$$

Ţinând seama că patrulaterele PB_2AC_1, PC_2BA_1 şi PA_2CB_1 sunt paralelograme, relaţia (1) devine $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$. Conform relaţiei lui Leibniz avem $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PO}$, prin urmare $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$.