COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014
TESTE DE SELECŢIE JUNIORI

Abstract. Comments on some of the problems asked at the Junior Selection Tests after the National Mathematical Olympiad of 2014.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII, IX.
Data: 16 mai 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

This ain't Kansas, Dorothy![1]

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Testelor de Selecţie Juniori I / II / III din 2014 reflectă opinia personală a autorului (Testul I a fost deja comentat în materialul referitor la Etapa Finală, dar îl reiau aici, pentru a avea o imagine completă).[2] În final apare şi un addendum la materialul despre BMO 2014.

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Test Selecţie I către jBMO

Subiectul (1)**.** *Arătaţi că dacă numerele reale $x, y, z > 0$ verifică relaţia $xyz + xy + yz + zx = 4$, atunci $x + y + z \geq 3$.*

Lucian Petrescu

Soluţie. Expresiile din problemă ne roagă să considerăm expresiile simetrice elementare $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$, $w = xyz$. Atunci aplicând cunoscutele inegalităţi Maclaurin (care pentru trei variabile sunt extrem de uşor de obţinut şi în mod direct) avem $4 = v + w \leq \dfrac{u^2}{3} + \dfrac{u^3}{27}$, prin urmare $u^3 + 9u^2 - 108 \geq 0$, adică $(u - 3)(u + 6)^2 \geq 0$, de unde $\boxed{u \geq 3}$ (cu egalitate doar pentru $x = y = z = 1$). De ce oare $x, y, z > 0$ şi nu $x, y, z \geq 0$? □

Soluţie Alternativă. Se pare că este bine cunoscut în cercurile specialiştilor în inegalităţi că numerele reale pozitive x, y, z verifică $xyz+xy+yz+zx = 4$ dacă şi numai dacă pot fi reprezentate ca $x = \dfrac{2a}{b + c}$, $y = \dfrac{2b}{c + a}$, $z = \dfrac{2c}{a + b}$, cu a, b, c numere reale pozitive. Dar atunci inegalitatea devine ... Nesbitt. □

[1] The Wizard of Oz (într-un libret liberal).

[2] Lipsesc unele probleme, la care nu am văzut interesul de a fi prezentate. Le găsiţi pe toate, ca şi rezultatele, la `http://ssmr.ro/onm2014` şi `http://ssmr.ro/program_juniori`.

Soluţie Alternativă. Ştiu prea bine că tehnica pe care o voi folosi în cele ce urmează depăşeşte nivelul competiţiei, dar de ce să nu practicăm o metodă care funcţionează automat în unele condiţii?

Metoda multiplicatorilor Lagrange. Fie $R(x,y,z) = xyz + xy + yz + zx$ şi

$$L(x,y,z;\lambda) = x + y + z - \lambda(R(x,y,z) - 4),$$

definită pentru $x,y,z \geq 0$ şi un parametru real λ. Sistemul de derivate parţiale egalate cu zero este $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} & = & 1 - \lambda(yz + y + z) & = & 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} & = & 1 - \lambda(zx + z + x) & = & 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} & = & 1 - \lambda(xy + x + y) & = & 0 \end{cases}$ de unde se obţine imediat sistemul de ecuaţii $\begin{cases} (x-y)(z+1) & = & 0 \\ (y-z)(x+1) & = & 0 \\ (z-x)(y+1) & = & 0 \end{cases}$ cu singura soluţie $x = y = z = t$ în interiorul domeniului de definiţie al lui L. Aceasta duce la $t^3 + 3t^2 = 4$, adică $(t-1)(t+2)^2 = 0$, deci $(x,y,z) = (1,1,1)$ ca singur punct critic, care se dovedeşte a fi punct de minim, cu $L(1,1,1) = 3$.

Deoarece $R(0,y,z) = 4$ duce la $yz = 4$, deci $L(0,y,z) = y+z \geq 2\sqrt{yz} = 4$, iar $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x,y,z) = +\infty$, rezultă că punctul de minim $(x,y,z) = (1,1,1)$ este global. $\square$

Subiectul (2)**.** *Determinaţi perechile (a,b) de numere întregi pentru care*

$$\frac{a+2}{b+1} + \frac{a+1}{b+2} = 1 + \frac{6}{a+b+1}.$$

Lucian Dragomir

Soluţie. Adunând $1 + 1 = 2$ în ambii membri, obţinem

$$(a+b+3)\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2}\right) = \frac{3(a+b+3)}{a+b+1}.$$

Atunci sau $a+b+3 = 0$, deci $\boxed{(a,b) = (-b-3,b), \text{ pentru } b \in \mathbb{Z} \setminus \{-2,-1\}}$, sau $(a+b+1)(2b+3) = 3(b+1)(b+2)$. Această ultimă relaţie se scrie $b^2 - 2(a-2)b - 3(a-1) = 0$, de unde $b = a - 2 \pm \sqrt{a^2 - a + 1}$. Trebuie atunci $a^2 - a + 1 = c^2$, deci $(2a-1)^2 + 3 = (2c)^2$, cu singura soluţie $|2a-1| = 1$. Rămân cazurile

• $a = 0$. Atunci $b \in \{-3,-1\}$, dar trebuie $b \neq -1$, iar pentru $b = -3$ avem $a+b+3 = 0$ (cu soluţia deja inclusă în familia infinită găsită mai sus);

• $a = 1$. Atunci $b \in \{-2,0\}$, dar trebuie $b \neq -2$, şi deci obţinem singura soluţie suplimentară $\boxed{(a,b) = (1,0)}$.

Desigur, trucul cu adunarea $1 + 1 = 2$ duce la o rapidă factorizare. În lipsa lui, metode pur aritmetice – de divizibilitate – nu sunt evident deajuns, iar factorizarea este greu de observat. $\square$

Subiectul (3)**.** *Arătaţi că dintre şase puncte situate în interiorul unui pătrat de latură* 3*, se pot alege două astfel încât distanţa dintre ele să fie mai mică decât* 2*.*

***

Soluţie. Fie $1,268 \approx 3 - \sqrt{3} < x < \sqrt{7}/2 \approx 1,323$, de exemplu $x = 13/10$. Partiţionăm acum pătratul de dimensiuni 3×3 în două dreptunghiuri de dimensiuni $x \times 3/2$ şi trei dreptunghiuri de dimensiuni $(3 - x) \times 1$.

Din principiul cutiei, două dintre cele şase puncte se vor afla într-unul dintre aceste dreptunghiuri, dar prin calcul se obţine că diagonala fiecărui dreptunghi este mai scurtă decât 2. Pentru $x = 31/24$ obţinem chiar ambele diagonale egale cu $\boxed{\approx 1,979 < 2}$.[3] $\square$

Subiectul (4)**.** *Geometrie – vezi soluţia oficială.*

Leonard Giugiuc

Subiectul (5)**.** *Geometrie – vezi soluţia oficială.*

Marius Bocanu

3. Test Selecţie II către jBMO

Subiectul (1)**.** *Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care*

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} \text{ şi } \frac{b^2+a}{a^2-b}$$

sunt numere întregi.

APMO 2002 (Problem 2)

Soluţie. Cheia este să alegem o ordine între a şi b; din simetrie, fie $a \geq b$. Atunci $a^2 - b \geq b^2 - b \geq 0$, deci din $a^2 - b \mid b^2 + a$ rezultă $a^2 - b \leq b^2 + a$, adică $(a + b)(a - b - 1) \leq 0$. Prin urmare avem cazurile

- $a = b$, pentru care trebuie $b^2 - b \mid b^2 + b$, deci $b - 1 \mid b + 1$, de unde $b - 1 \mid 2$, cu soluţiile posibile $\boxed{(a, b) \in \{(2, 2), (3, 3)\}}$;
- $a = b+1$, pentru care trebuie $b^2-(b+1) \mid (b+1)^2+b$, deci $b^2-b-1 \mid 4b+2$, ceea ce forţează $1 \leq b \leq 5$, cu soluţiile posibile $\boxed{(a, b) \in \{(2, 1), (3, 2)\}}$, dar prin simetrie şi $\boxed{(a, b) \in \{(1, 2), (2, 3)\}}$. $\square$

[3] Să observăm că cinci puncte nu sunt de ajuns (luând vârfurile şi centrul pătratului, distanţa minimă este $3/\sqrt{2} > 2$). Rezultatul cel mai strâns (din literatură) este că distanţa minimă (pentru şase puncte) nu depăşeste $\sqrt{13}/2 \approx 9/5 < 2$.

Subiectul (2)**.** *Determinaţi numerele reale* x*,* y*,* $z \in (0,1)$ *care verifică simultan relaţiile:* $\left\{\begin{array}{lcl}(x^2+y^2)\sqrt{1-z^2} & \geq & z\\ (y^2+z^2)\sqrt{1-x^2} & \geq & x\\ (z^2+x^2)\sqrt{1-y^2} & \geq & y\end{array}\right.$.

Lucian Petrescu

Soluţie Alternativă. Având $x, y, z \in [0,1)$, putem evident scrie $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$, $z = \sin\gamma$, cu $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2)$. Atunci prima inegalitate se scrie

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geq \tan\gamma \geq 2\sin^2\gamma,$$

căci revine la $\sin\gamma(2\sin\gamma\cos\gamma - 1) = \sin\gamma(\sin 2\gamma - 1) \leq 0$. Având şi relaţiile analoage pentru a doua şi a treia inegalitate, ajungem prin însumare la $2\sum\sin^2\alpha \geq 2\sum\sin^2\alpha$, deci egalitate în toate relaţiile. O posibilitate este $\alpha = \beta = \gamma = \pi/4$, adică $\boxed{x = y = z = \sqrt{2}/2}$, ceea ce răspunde la enunţul original, aşa cum a fost el dat; cealaltă posibilitate este $\alpha = \beta = \gamma = 0$, adică $\boxed{x = y = z = 0}$, ceea ce reprezintă o naturală prelungire a enunţului. $\square$

Subiectul (3)**.** *Fie triunghiul ascuţitunghic* ABC *şi fie punctele variabile* $D \in (BC)$*,* $E \in (AD)$*. Cercul circumscris triunghiului* CDE *intersectează mediana din* C *a triunghiului* ABC *în punctul* F*. Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului* AEF *este situat pe o dreaptă fixă.*

***

Remarcă. Un mic, simpatic exerciţiu de citire a patrulaterelor inscriptibile formate. Iar cerinţa este mai proaspătă şi neobişnuită. Vezi soluţia oficială.

Subiectul (4)**.** *Fie* $n \geq 6$ *un număr natural. Avem la dispoziţie* n *culori. Colorăm fiecare din pătratele unitate ale unei table* $n \times n$ *cu câte una din cele* n *culori.*

a) Arătaţi că, pentru orice asemenea colorare, există un drum al unui cal (de şah), din pătratul din stânga-jos în pătratul din dreapta-sus, care să nu folosească toate culorile.

b) Arătaţi că dacă reducem numărul de culori la $\lfloor 2n/3 \rfloor + 2$*, atunci afirmaţia de la punctul de mai sus este adevărată pentru o infinitate de numere naturale* n *şi falsă tot pentru o infinitate de numere* n*.*

Marius Bocanu

Soluţie. Vom asocia coordonate pătratelor tablei, cu pătratul din stânga-jos fiind $(1,1)$ iar cel din dreapta-sus fiind (n,n), Să observăm că putem ajunge de la (k,ℓ) la $(k+3,\ell+3)$ în două mutări $(k,\ell) \to (k+2,\ell+1) \to (k+3,\ell+3)$.

• $n \equiv 1 \pmod 3$. Folosind mutări ca cele descrise mai sus, drumul $(1,1) \to \cdots \to (n,n)$ trece prin exact $\dfrac{2n+1}{3} < \lfloor 2n/3 \rfloor + 2 < n$ pătrate, deci nu trece prin pătrate de toate culorile, în condiţiile de la a) sau b);

• $n \equiv 0 \pmod 3$. Drumul care începe

$$(1,1) \to (2,3) \to (3,5) \to (5,4) \to (6,6) \to \cdots \to (n,n)$$

şi care apoi foloseşte mutări ca cele descrise mai sus, va trece prin exact $\dfrac{2n+3}{3} < \lfloor 2n/3 \rfloor + 2 \le n$ pătrate, deci nu trece prin pătrate de toate culorile, în condiţiile de la a) sau b);

• $n \equiv 2 \pmod 3$. Drumul care începe

$$(1,1) \to (2,3) \to (4,2) \to (3,4) \to (5,5) \to \cdots \to (n,n)$$

şi care apoi foloseşte mutări ca cele descrise mai sus, va trece prin exact $\dfrac{2n+5}{3} = \lfloor 2n/3 \rfloor + 2 < n$ pătrate, deci nu trece prin pătrate de toate culorile, în condiţiile de la a).[4] Mai rămâne să exhibăm o colorare cu $\lfloor 2n/3 \rfloor + 2$ culori, ca la punctul b), pentru care orice drum trece prin pătrate de toate culorile.

8	4	4	4	5	4	5	4	7
7	4	4	4	4	5	6	4	4
6	4	4	4	5	4	4	6	5
5	3	4	3	4	5	4	5	4
4	4	3	4	3	4	5	4	5
3	3	2	4	4	3	4	4	4
2	4	4	2	3	4	4	4	4
1	1	4	3	4	3	4	4	4
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Exemplu pentru $n = 8$, cel mai mic cu $n \equiv 2 \pmod 3$.
(culoarea verde folosită este pentru a nu încărca figura)

Folosim culoarea 1 din $N = \lfloor 2n/3 \rfloor + 2$ culori (să remarcăm că N va fi impar) pentru colţul stânga-jos; apoi culoarea $2 \le k \le (N-1)/2$ pentru pătratele în care calul poate ajunge în $k-1$ mutări, dar nu mai puţine. Folosim culoarea N pentru colţul dreapta-sus; apoi culoarea $(N+3)/2 \le k \le N-1$ pentru pătratele în care calul poate ajunge în $N-k$ mutări, dar nu mai puţine. Se vede că nu există conflict de colorare, căci pătratele din cele două jumătăţi de colorare sunt despărţite de diagonala $\{(m, n-m+1) \mid 1 \le m \le n\}$. În fine, colorăm cu culoarea $(N+1)/2$ restul pătratelor. Deoarece valoarea absolută a diferenţei culorilor a două pătrate consecutive din drumul unui cal este cel mult 1, rezultă că, pentru a ajunge din pătratul colorat 1 la cel colorat N, calul trebuie să treacă prin pătrate colorate cu toate cele N culori. $\square$

[4] Aici se vede raţiunea condiţiei $n \ge 6$; pentru $n = 5$ avem $\dfrac{2n+5}{3} = \lfloor 2n/3 \rfloor + 2 = n$, şi există o colorare (cu un model ca cele de mai jos) pentru care afirmaţia devine falsă.

Remarcă. Soluţia oficială descria neconvingător acest ultim esenţial model de colorare, şi cu eroarea de notaţie folosind peste tot n în loc de k, unde era $n = 3k + 2$. Mai mult, o întreagă secţiune dedicată analizei lungimii unui drum minimal este cu totul ne-necesară.

> Orice mutare schimbă suma coordonatelor cu ± 1 sau ± 3. Trebuie aşadar cel puţin $\left\lceil \frac{2n-2}{3} \right\rceil$ mutări, deci drumul trece prin cel puţin $\left\lceil \frac{2n-2}{3} \right\rceil + 1 = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1$ pătrate (numărând atât pătratul iniţial cât şi cel final). Pentru $n = 3k+2$, $k \geq 2$, aceasta înseamnă cel puţin $2k+2$ pătrate. Dar colorând tabla ca o tablă de şah, colţurile $(1, 1)$ şi (n, n) vor avea aceeaşi culoare, iar un drum de $2k + 2$ pătrate are capetele de culori diferite, deci un drum minimal va trebui să aibă cel puţin $2k + 3 = \lfloor 2n/3 \rfloor + 2$ pătrate.

Chiar soluţia oficială face observaţia că minimalitatea drumurilor descrise nu este importantă; ceea ce contează este că astfel de drumuri, mai scurte decât numărul de culori, există. Cel mult, acest argument de minimalitate "justifică" valoarea $\lfloor 2n/3 \rfloor + 2$.

Un alt model posibil (exemplificat pentru $n = 8$) este ilustrat mai jos.[5]

8	4	5	4	5	6	5	6	7
7	3	4	5	4	5	6	5	6
6	4	3	4	5	4	5	6	5
5	3	4	3	4	5	4	5	6
4	2	3	4	3	4	5	4	5
3	3	2	3	4	3	4	5	4
2	2	3	2	3	4	3	4	5
1	1	2	3	2	3	4	3	4
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Pentru $n \equiv 2 \pmod 3$ şi $N = \lfloor 2n/3 \rfloor + 2$ culori, considerăm secvenţa

c_k	1	2	3	2	3	4	$\cdots$	$N-3$	$N-2$	$N-1$	$N-2$	$N-1$	N
k	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$2n-6$	$2n-5$	$2n-4$	$2n-3$	$2n-2$	$2n-1$

şi completăm de la stânga la dreapta linia ℓ cu termenii $c_\ell, c_{\ell+1}, \ldots, c_{\ell+n-1}$ pentru $1 \leq \ell \leq n$. Deoarece valoarea diferenţei culorilor a două pătrate consecutive din drumul unui cal este întotdeauna ± 1, rezultă că, pentru a ajunge din pătratul colorat 1 la cel colorat N, calul trebuie să treacă prin pătrate colorate cu toate cele N culori.

[5] Model prezentat în concurs de unul dintre participanţi (Tudor Plopeanu).

Cu metode asemănătoare putem obţine că numărul maxim N de culori pentru care afirmaţia încetează de a rămâne adevărată (prin existenţa unui model de colorare) este $N = \lfloor 2n/3 \rfloor + 1$ pentru $n \equiv 0, 1 \pmod 3$, $n \geq 4$, la fel cum am demonstrat că $N = \lfloor 2n/3 \rfloor + 2$ pentru $n \equiv 2 \pmod 3$, $n \geq 5$. Modéle pentru cazurile mici sunt după cum urmează (cazul $n = 3$, cu $N = 5$, este cu totul special, din cauza lipsei spaţiului de manevră). O formulă unificată pentru $n \geq 4$ este $\boxed{N = 2\lfloor (n+1)/3 \rfloor + 1}$.

3	3	2	5
2	4	○	2
1	1	4	3
	1	**2**	**3**

4	○	○	○	3
3	○	2	○	○
2	○	○	2	○
1	1	○	○	○
	1	**2**	**3**	**4**

5	3	3	3	3	5
4	3	3	4	3	3
3	3	2	3	4	3
2	3	3	2	3	3
1	1	3	3	3	3
	1	**2**	**3**	**4**	**5**

6	3	3	3	3	3	5
5	3	3	3	4	3	3
4	3	3	3	3	4	3
3	3	2	3	3	3	3
2	3	3	2	3	3	3
1	1	3	3	3	3	3
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

7	3	3	3	3	3	3	5
6	3	3	3	3	4	3	3
5	3	3	3	3	3	4	3
4	3	3	3	3	3	3	3
3	3	2	3	3	3	3	3
2	3	3	2	3	3	3	3
1	1	3	3	3	3	3	3
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Ei, poate acel ”mic, simpatic exerciţiu ...” de la problema 3 (de geometrie) nu era chiar atât de mic? Doar două note de 6/7, una de 3 şi restul 0!!! Iar notele de la problema 4 (de combinatorică) nu sunt nici ele mult mai bune; un 6/7, un 5, doi de 4 şi restul cel mult 3. Chiar şi la problemele 1 şi 2 au fost mici ratări şi puncte pierdute (6 în loc de 7), chiar printre cei 14 rămaşi în lotul restrâns.

4. TEST SELECŢIE III CĂTRE JBMO

Subiectul (1). *Arătaţi că pentru orice numere reale $a, b, c, d > 0$ astfel încât $abc + bcd + cda + dab = 4$ are loc inegalitatea:*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4.$$

***

Soluţie. Iarăşi, de ce oare $a, b, c, d > 0$? Era clar arhisuficient să fi fost dat $4 \leq |abc+bcd+cda+dab| \leq |a|\cdot|b|\cdot|c| + |b|\cdot|c|\cdot|d| + |c|\cdot|d|\cdot|a| + |d|\cdot|a|\cdot|b|$ pentru a putea lucra cu valorile absolute, şi deci presupune $a, b, c, d \geq 0$. Soluţia oficială continuă cu o înşiruire de aplicaţii ale inegalităţilor mediilor şi Cauchy-Schwarz. □

Soluţie Alternativă. Lucrând cu $a, b, c, d \geq 0$, după observaţia de mai sus, avem $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (şi celelalte), deci prin însumare

$$\sum a^2 \geq 4\left(\frac{\sum ab}{6}\right) \geq 4\left(\frac{\sum abc}{4}\right)^{2/3} \geq 4,$$

din inegalitatea Maclaurin, cu egalitate doar dacă $\boxed{a = b = c = d = 1}$.[6] □

Soluţie Alternativă. Din simetria relaţiei restrictive date, şi din observaţia de mai sus, putem presupune $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Atunci

- $4 \leq abc + bcd + cda + dab \leq 4abc \leq 4a^3$ duce la $a \geq 1$;
- $4 \leq abc + bcd + cda + dab \leq 4abc \leq 2ab(a + b) \leq 2(a + b)\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

duce la $a + b \geq 2$;

- $4 \leq abc + bcd + cda + dab \leq 4abc \leq 4\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$ duce la $a + b + c \geq 3$;
- $a + b + c + d \geq 4\sqrt[3]{\dfrac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \geq 4$ din inegalitatea Maclaurin.

Rezultă că $(a, b, c, d) \succeq (1, 1, 1, 1)$, adică (a, b, c, d) majorizează $(1, 1, 1, 1)$ (tehnic vorbind, ar trebui $a + b + c + d = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, dar funcţia convexă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x^2$ fiind crescătoare pe $[0, \infty)$, rezultă că această ultimă condiţie din majorizare poate fi relaxată). Inegalitatea Karamata duce atunci la rezultatul cerut, cu egalitate evident doar dacă $\boxed{a = b = c = d = 1}$. Deoarece funcţia $f(x) = x^k$ este convexă şi crescătoare pe $[0, \infty)$ pentru $\boxed{k \geq 1}$, rezultă în general că $a^k + b^k + c^k + d^k \geq 4$. □

Soluţie Alternativă. Revin cu o altă exemplificare a acestei tehnici (care depăşeşte nivelul competiţiei, dar merită văzută în desfăşurarea ei).

Metoda multiplicatorilor Lagrange. Fie $R(a, b, c, d) = abc + bcd + cda + dab$ şi

$$L(a, b, c, d; \lambda) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \lambda(R(a, b, c, d) - 4),$$

definită pentru $a, b, c, d \geq 0$ şi un parametru real λ. Sistemul de derivate parţiale egalate cu zero este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial a} = 2a - \lambda(bc + cd + db) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial b} = 2b - \lambda(cd + da + ac) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial c} = 2c - \lambda(da + ab + bd) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial d} = 2d - \lambda(ab + bc + ca) = 0 \end{cases}.$$

[6] Achtung! Încercarea directă $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (şi celelalte) nu duce la rezultat, căci $\sum \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq 4\left(\sum abc/4\right)^{2/3}$ din inegalitatea Power Mean.

Din primele două ecuaţii se obţine uşor $(a-b)(ac+bc+cd+ad+bd)=0$, cu singura posibilitate $a=b$, etc., deci cu singura soluţie $a=b=c=d=t$ în interiorul domeniului de definiţie al lui L. Aceasta duce la $4t^3=4$, adică $t=1$, deci $(a,b,c,d)=(1,1,1,1)$ ca singur punct critic, care se dovedeşte a fi punct de minim, cu $L(1,1,1,1)=4$.

Deoarece $R(0,b,c,d)=4$ duce la $bcd=4$, deci $L(0,b,c,d)=b^2+c^2+d^2\geq 3\sqrt[3]{b^2c^2d^2}=3\sqrt[3]{16}>4$, iar $\lim\limits_{a\to+\infty} L(a,b,c,d)=+\infty$, rezultă că punctul de minim $(a,b,c,d)=(1,1,1,1)$ este global. □

Subiectul (2)**.** *Determinaţi numerele prime p şi q care verifică egalitatea:*

$$p^3+107=2q(17q+24).$$

Lucian Petrescu

Soluţie. Chiar şi soluţia oficială nu foloseşte decât primalitatea lui q. De ce atunci se specifică p prim? Numai pentru a înceţoşa drumul către soluţie? Ca de obicei, sunt în profund dezacord cu astfel de metehne.[7]

Ecuaţia poate fi scrisă $p^3+125=34q^2+48q+18$, sau încă

$$(p+5)(p^2-5p+25)=(5q+3)^2+(3q+3)^2.$$

Cazul $q=2$ duce la $p=5$. Pentru $q\geq 3$ impar se obţine $p\equiv -1 \pmod 4$, dar atunci $19\leq p^2-5p+25\equiv -1 \pmod 4$, deci are (măcar) un factor prim $r\equiv -1 \pmod 4$. Aceasta duce la $r \mid 5q+3$ şi $r \mid 3q+3$, deci $r\mid 5(3q+3)-3(5q+3)=6$, dar şi $r\mid (5q+3)-(3q+3)=2q$. Prin urmare $r=3$, aşadar $3\mid q$, deci $q=3$, care duce la $p=7$.

Ecuaţia poate fi scrisă însă şi $34p^3+34\cdot 107+24^2=(34q+24)^2$, sau încă

$$(34p)^3+34^2(34\cdot 107+24^2)=(34(34q+24))^2,$$

deci sub forma $X^3+k=Y^2$, una din ecuaţiile de tip Mordell, despre care se ştie că au doar un număr **finit** (poate zero) de soluţii în numere întregi![8] Dar metodele de rezolvare sunt uneori extrem de laborioase ... ar fi curios de ştiut dacă în afară de soluţiile cu q prim (pentru care şi p va fi prim), anume $\boxed{(p,q)\in\{(5,2),(7,3)\}}$, mai există şi altele.

Până una alta, singura soluţie cunoscută recurge la evidenţierea unei sume de pătrate divizibilă printr-un prim pentru care -1 nu este rest pătratic. Nu este chiar primul lucru la care să te gândeşti ... aştept alte idei?!? □

[7] Dar nu se întâmplă numai la noi! Problema 6 Seniori (7 Juniori), Tuymaada 2013, cerea să se rezolve în numere prime ecuaţia $p^2-pq-q^3=1$, şi se dovedeşte că este suficient să se ceară ca numai unul (oricare) dintre p şi q să fie prim, pentru a putea ajunge la soluţia unică $(p,q)=(7,3)$.

[8] De exemplu, Problema 2, BMO 2005, cerea să se găsească toate numerele prime p pentru care $p^2-p+1=b^3$, cu b întreg. Aceasta se poate scrie $(2b)^3-48=(4(2p-1))^2$, şi această ecuaţie tip Mordell a fost de fapt rezolvată complet de Ljunggren, care a găsit singura soluţie netrivială ca fiind $(p,b)=(19,7)$. O variantă a fost folosită la Olimpiada Italiană 2011, anume $p^2-p-1=b^3$ (şi era pe punctul să fie întrebată şi la EGMO 2012, fără vigilenţa acestui autor).

Subiectul (3). *Fie numerele naturale $n \geq m \geq 4$ şi $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ o submulţime a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea: că pentru orice $a, b \in A$, $a \neq b$, dacă $a + b \leq n$, atunci $a + b \in A$. Arătaţi că:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

***

Soluţie. Putem presupune $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m \leq n$. Ideea (relativ uşor de găsit) care duce la soluţie este de a arăta că media aritmetică a oricărei perechi de numere din A, cu indici egal depărtaţi de capete, este cel puţin $\dfrac{n+1}{2}$, din care cerinţa rezultă imediat. Mai greu de pus în practică. Fie $a_k + a_{m-k+1} < n + 1$ pentru vreun $1 \leq k < (m + 1)/2$. Atunci

$$a_{m-k+1} < a_1 + a_{m-k+1} < \cdots < a_{k-1} + a_{m-k+1} < n + 1,$$

deci aceste numere, aflate în A, sunt în ordine

$$a_{m-k+1} < a_{m-k+2} < \cdots < a_m \leq n.$$

Dar atunci $a_m < a_k + a_{m-k+1}$, deci $a_k + a_{m-k+1} \geq n + 1$, contradicţie. Rămâne doar cazul m impar, $2 < k = (m + 1)/2$. Fie $2a_k < n + 1$. Atunci

$$a_{k-1} < a_1 + a_{k-1} < a_1 + a_k < a_2 + a_k < \cdots < a_{k-1} + a_k < n + 1,$$

deci aceste numere, aflate în A, sunt în ordine

$$a_{k-1} < a_k < a_{k+1} < a_{k+2} < \cdots < a_{2k-1} = a_m \leq n.$$

Dar atunci $n + 1 \leq a_1 + a_{2k-1} = a_1 + (a_{k-1} + a_k) = (a_1 + a_{k-1}) + a_k = 2a_k$, adică $2a_k \geq n + 1$, contradicţie.

Soluţia oficială se complică puţin, într-un formalism nu chiar necesar, şi conţine eroarea de tipar următoarele $2k + 1$ numere în loc de următoarele $2k - 1$ numere. Evident, mulţimi A pentru care se realizează egalitatea există, de exemplu chiar $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, pentru $m = n$. □

Subiectul (4). *În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB \neq BC$, se notează cu T mijlocul lui $[AC]$, iar şi cu A_1, respectiv şi C_1, picioarele înălţimilor din A, respectiv C. Fie Z punctul de intersecţie al a tangentelor în A şi C la cercul circumscris triunghiului ABC, X intersecţia dreptelor ZA şi A_1C_1 şi Y intersecţia dreptelor ZC şi A_1C_1.*

a) Arătaţi că T este centrul cercului înscris în triunghiul XYZ.

b) Se notează cu H ortocentrul triunghiului ABC şi cu D al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi A_1BC_1.

Demonstraţi că punctele T, H şi D sunt coliniare.

c) Arătaţi că punctul D se află pe cercul circumscris triunghiului XYZ.

Marius Bocanu

Remarcă. Vezi soluţia oficială.

Problema 3 (combinatorică) a generat doar două note mari, de 7/7 şi 6, două de 3 şi restul cel mult 1. Iar notele de la problema 4 (geometrie) nu sunt nici ele mult mai bune; un 7/7 şi restul cel mult 4 (din puncte parţiale la primele două cerinţe). Chiar şi la problemele 1 şi 2 au fost ratări, chiar printre cei 14 rămaşi în lotul restrâns.

Cu doar două Teste de Selecţie rămase, echipa pentru jBMO 2014 din Macedonia începe să se contureze. Felicitări celor încă rămaşi în cursă!

5. Încheiere

Ştiţi ce? în condiţiile în care dificultatea problemelor BMO (vezi anul acesta) şi jBMO (vezi anul trecut) este atât de joasă, selecţia problemelor pentru teste a fost chiar foarte potrivită scopului urmărit! La ce bun să căutăm acei copii care se descurcă în prezenţa unor probleme mai spinoase, când cerinţa este pentru rezolvitori competenţi de probleme pedestre ... Aşa încât compoziţia testelor a fost exact ceea ce medicul a prescris, deşi uneori chiar şi un simplu guturai s-a dovedit recalcitrant. Nu, greşesc! ... chiar şi aceste probleme s-au dovedit dificile pentru marea parte a concurenţilor. Sunt eu probabil prea exigent, şi prea încrezător în posibilităţile acestor copii, încă începători. *Mea culpa.*

În stilul obişnuit al ultimilor ani – cu care sunt familiar din experienţă proprie trecută; oare nu am fost şi contactat mai de mult, după miezul nopţii, pentru a oferi o sugestie de problemă? – compoziţia barajelor este decisă în mare parte în seara (vezi noaptea) din ajun; se poate deduce şi din faptul cum arată unele enunţuri şi soluţii că au fost scrise în grabă. Este o chestiune la care m-am referit deseori şi în trecut, o bombă care aşteaptă să explodeze, din mai multe motive care ar trebui să fie evidente tuturora.

• Posibilitatea ca să nu existe destule probleme disponibile, din care să fie alcătuit testul, este prevalentă. Aceasta poate duce la un test debalansat – prea uşor sau prea greu – căci alegerile sunt limitate. Iar compunerea unor probleme *ad-hoc*, sau alegerea pripită din vreo sursă pre-existentă, sunt la fel de periculoase, căci nimeni nu are timpul să le analizeze pe toate feţele.

• Posibilitatea ca soluţiile să fie greoaie, sau chiar greşite, şi să lipsească soluţii alternative, este şi ea prezentă. Timpul disponibil este limitat, lumea este obosită, şi numărul restrâns de perechi de ochi şi singletoane de creier care văd şi analizează problemele este mic. În principiu, timpul necesar elaborării unui test bun este invers proporţional cu numărul persoanelor care participă activ la aceasta. Unei singure persoane îi este necesară o lună de zile; poate că o duzină de persoane s-ar descurca şi în cinci zile. Problemele folosite în olimpiadele ruseşti "circulă" într-un grup de multe persoane supra-calificate timp de câteva săptămâni în prealabil; dar ce ştiu oare ruşii ăştia despre matematică?!? ei nu se tem că subiectele "transpiră", ci mai mult că s-ar putea prezenta cu un produs inferior criteriilor lor de excelenţă.

Au fost voci în trecut, ale unor importante persoane cu nume belicoase, care susţineau că nu numai compoziţia testului, dar chiar problemele care îl alcătuiesc, ar trebui ”compuse” în dimineaţa zilei de concurs. O naivitate mai mare este greu de imaginat. Probleme de calitate apar rar, şi sunt găsite – sau compuse – greu, de multe ori ca produse secundare ale propriei munci de cercetare a compunătorului. La comandă se pot crea doar exerciţii ”de manual”, aplicaţii copiate după modéle cunoscute, şi care verifică doar însuşirea unor anume cunoştinţe, metode, sau tehnici, şi nu originalitatea de gândire cerută în această ocazie.

• Motivele invocate în general pentru cele de mai sus conţin ca primă vioară frica de a se pierde secretul întreprinderii. Din plecare, toată lumea este considerată coruptibilă şi potenţial infracţională, şi singura idee de a pre-întâmpina frauda este de a pune atâtea obstacole în calea sa încât să o facă improbabilă. Pe vremuri, în societatea socialist-spre-comunistă, fiecare Telex din fiecare instituţie era plasat într-o cameră cu lacăt şi grilaj metalic (din motive pe care le puteţi ghici ...). Nu numai ineficient, dar şi jignitor pentru un om cu o moralitate *à toute épreuve*. Şi fie ca, în toată libertatea de acţiune, cel care abuzează, sau profită pentru motive personale oculte, să fie înlăturat pe viitor şi trimis acolo unde-i este locul – *fuora!* Profilaxia se realizează mai bine prin imunizare decât prin asigurarea de condiţii sterile.

Foarte probabil că niciuna dintre persoanele în cauză nu citeşte vreodată aceste comentarii ale mele. Dar numai pentru că, stând cu spatele la pădure, nu vedem copacii, aceştia nu încetează să existe. Vă garantez că cincizeci de ani de-acuma în viitor lucrurile au să se îndrepte ... răbdare şi tiutiun ... (cum zicea Ivan Turbincă), doar aşteptaţi – şi-oţi vedea!