COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014
TESTE DE SELECŢIE SENIORI

ABSTRACT. Comments on some of the problems asked at the Senior Selection Tests after the National Mathematical Olympiad of 2014.

Se adresează claselor VIII, IX, X, XI, XII.
Data: 19 mai 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

This ain't Kansas, Dorothy![1]

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Testelor de Selecţie Seniori II / III din 2014 reflectă opinia personală a autorului (Testul I nu a fost comentat nici în materialul referitor la Etapa Finală, din motive personale).[2] În final apare şi un addendum la materialul despre BMO 2014.

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Test Selecţie II către IMO

Subiectul (1)**.** *Fie ABC un triunghi, şi fie X, Y, Z puncte interioare pe laturile BC, CA, respectiv AB. Demonstraţi că triunghiul $X'Y'Z'$, obţinut din XYZ printr-o omotetie din centrul de greutate al triunghiului XYZ, de raport 4, acoperă cel puţin unul dintre vârfurile A, B, C.*

???

Remarcă. Menţionez această problemă doar pentru a atrage atenţia asupra ideii fecunde din prima soluţie oficială, anume de a considera o transformare afină prin care triunghiul XYZ devine echilateral, cât şi a faptului că, în mod simetric, cel puţin unul dintre vârfurile A, B, C se va afla în exteriorul (la limită, pe frontiera) triunghiului $X'Y'Z'$.

Subiectul (2)**.** *Fie $a \in (0,1)$, fie $n \in \mathbb{N}^*$, şi fie $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f_n(x) = x + x^2/n$. Demonstraţi că*

$$\frac{a(1-a)n^2 + 2a^2n + a^3}{(1-a)^2n^2 + a(2-a)n + a^2} < (\underbrace{f_n \circ \cdots \circ f_n}_{de\ n\ ori})(a) < \frac{an + a^2}{(1-a)n + a}.$$

MofM 2013 ExtraList

[1] The Wizard of Oz (într-un libret liberal).

[2] Lipsesc unele probleme, la care nu am văzut interesul de a fi prezentate. Le găsiţi pe toate, ca şi rezultatele, la `http://ssmr.ro/onm2014` şi `http://ssmr.ro/program_juniori`.

Soluţie. Pentru $n = 1$ cerinţa este trivială, iar inegalitatea din dreapta este chiar egalitate – un lapsus; deci vom presupune în cele ce urmează $n > 1$.

Să luăm $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x + x^2/\lambda$, unde $\lambda > 0$. Pentru f^k fiind a k-a iterată a lui f, notăm $a_k = f^k(a)$ pentru $k \in \mathbb{N}$, deci $a_0 = a$ şi $a_{k+1} = f(a_k) = a_k + a_k^2/\lambda$ pentru $k \geq 0$. Această relaţie de recurenţă de ordin 1 este neliniară, şi nu poate fi rezolvată prin metode clasice. Dar există un "truc", acela de a scrie relaţia de recurenţă pentru termenii inversaţi.

Avem $\dfrac{1}{a_{k+1}} = \dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_k + \lambda}$, deci prin însumare şi telescopare

$$\frac{1}{a} - \frac{n}{a+\lambda} < \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + \lambda} < \frac{1}{a} - \frac{n}{a_n + \lambda},$$

căci $f(x) - x$ fiind pozitivă pe $(0, \infty)$ face ca şirul $(a_k)_{k \geq 0}$ să fie strict crescător. Pentru $n < 1 + \lambda/a$ avem $a_n < \dfrac{1 + \lambda/a - n}{a + \lambda}$, care pentru $\lambda = n$ este chiar una dintre inegalităţile cerute. Desigur, tot *spiel*-ul luării $\lambda = n$ este pentru a asigura $n < 1 + \lambda/a$, dar s-ar fi putut merge chiar puţin mai departe, şi lucra cu termenul a_{n+1}, pentru care inegalitatea $n + 1 < 1 + \lambda/a$ revine la $0 < a < 1$, maximum ce se poate spune. Şi majorantul ar arăta atunci $a_{n+1} < \dfrac{a(a+n)}{(1-a)n}$, mai estetic plăcut, şi s-ar fi rezolvat şi neplăcutul caz de egalitate pentru $n = 1$. Soluţia oficială înlocuieşte apoi această valoare a majorantului obţinut pentru a_n în cealaltă inegalitate de după telescopare, obţinând exact a doua inegalitate cerută.

Dar această metodă nu este optimală. Notând $a_n = x$ şi majorantul cu M, s-au obţinut $x < M$ şi $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{a} - \dfrac{n}{x+\lambda} < \dfrac{1}{a} - \dfrac{n}{M+\lambda}$. Un minorant mai bun pentru x se obţine din inecuaţia pătratică la care revine $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{a} - \dfrac{n}{x+\lambda}$, la fel de urât ca şi expresia din enunţ. $\square$

Remarcă. Problema este banală, dacă "trucul" de mai sus al manipulării relaţiei de recurenţă vine în minte. Această metodă este relativ obscură, cunoscută în diverse aplicaţii de analiză matematică, şi nu prea îşi are locul într-o problemă de test către IMO.[3] Coincidenţa fortuită dintre pasul de iterare n şi valoarea parametrului $\lambda = n$ nu ajută nici ea. Rezultatele vin să confirme această apreciere; două note de $4/7$, trei de 3 şi una de 1 – restul 0, pentru cei 27 cei mai buni olimpici din ţară ...

Subiectul (3). *Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care toate numerele naturale nenule mai mici decât n şi relativ prime cu n să fie puteri de numere prime.*

???

[3] A circulat o problemă, cerând primul indice pentru care şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ dat de $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = x_n + x_n^2/2013$, trece dincolo de valoarea 1, care depindea de metode similare.

Soluţie. Problema de folclor

> ($*$) Determinaţi cel mai mare întreg pozitiv n pentru care toate numerele naturale mai mari decât 1, mai mici decât n şi relativ prime cu n, să fie chiar numere prime

este menţionată în [H. RADEMACHER & O. TOEPLITZ – *The Enjoyment of Mathematics*], pp. 158-160, Princeton University Press (1957), tradusă şi în limba română, folosind inegalitatea lui Bonse. Pentru $(p_m)_{m\geq 1}$ fiind şirul numerelor prime $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$, inegalitatea spune că $p_1p_2\cdots p_m > p_{m+1}^2$ pentru $m \geq 4$ (o altă inegalitate a lui Bonse este că $p_1p_2\cdots p_m > p_{m+1}^3$ pentru $m \geq 5$), şi se obţine că $\boxed{n = 30}$ este cel mai mare număr cu această proprietate.[4] Este clar că problema de faţă este o (uşoară) întărire a ei.

Fie $p_k < p_\ell$ cele mai mici două numere prime care nu îl divid pe n; atunci $\displaystyle\frac{1}{p_k}\prod_{m=1}^{\ell-1} p_m \mid n$ şi $(p_kp_\ell, n) = 1$, deci trebuie $\displaystyle\frac{1}{p_k}\prod_{m=1}^{\ell-1} p_m \leq n < p_kp_\ell$, adică $\displaystyle\prod_{m=1}^{\ell-1} p_m \leq p_kn < p_k^2p_\ell$, şi deoarece $p_k \leq p_{\ell-1}$, trebuie $\displaystyle\prod_{m=1}^{\ell-2} p_m < p_{\ell-1}p_\ell$. Avem însă $p_1p_2p_3p_4 = 210 > 143 = p_5p_6$. Presupunând $\displaystyle\prod_{m=1}^{\ell-2} p_m > p_{\ell-1}p_\ell$ pentru $\ell > 5$, vom avea şi $\displaystyle\prod_{m=1}^{\ell-1} p_m > p_{\ell-1}^2p_\ell > 4p_{\ell-1}p_\ell > 2p_\ell^2 > p_\ell p_{\ell+1}$, din postulatul lui Bertrand (teorema lui Cebâşev). Atunci $\ell \leq 5$, deci $n < 77$. Sunt sigur chiar că inegalitatea de tip Bonse $p_1p_2\cdots p_m > p_{m+1}p_{m+2}$ pentru $m \geq 4$ se poate obţine cu aceleaşi metode complet elementare, fără a recurge la postulatul lui Bertrand (care este mult mai puternic).

Numerele n căutate sunt 1, **2**, **3**, **4**, 5, **6**, **8**, 9, 10, **12**, 14, **18**, 20, **24**, $\boxed{\mathbf{30}}$, 42, $\boxed{60}$ (îngroşate sunt cele care răspund la întrebarea ($*$); pentru un motiv neclar, soluţia oficială omite $n = 1$, care **răspunde** la cerinţă, în mod vacuu). Era mai inspirat, ca în ($*$), să se fi cerut doar determinarea celui mai mare astfel de număr, anume $\boxed{n = 60}$ [5] (evitând astfel pierderea timpului în găsirea tuturor celorlalte cazuri, mai mici). □

Remarcă. Meritul inegalităţilor de tip Bonse este că ele erau demonstrate cu mijloace cu totul elementare (la acea vreme demonstraţia elementară a lui Erdös pentru teorema lui Cebâşev (postulatul lui Bertrand) nu fusese încă dată). Dar cu aceasta din urmă, problema este extrem de simplă pentru o Problemă 3 într-un test de seniori, mai ales comparată cu Problema 2.

---

[4] Bebe Panaitopol a publicat în 2000 un articol în care obţinea inegalitatea tip Bonse $p_1p_2\cdots p_m > p_{m+1}^{m-\pi(m)}$, pentru toţi $m \geq 2$ (unde $\pi(m)$ este numărul numerelor prime cel mult egale cu m). Aceasta îmbunătăţea inegalitatea lui Pósa, în forma $p_1p_2\cdots p_m > p_{m+1}^k$ pentru $m \geq 2k$ ($k \geq 1$ dat).

[5] Un număr frumos, regăsit şi în *Republica* lui Platon.

Subiectul (4)**.** *Fie funcţia* $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *dată prin* $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$ *şi* $f(2n+1) = f(n) + f(n+1)$ *pentru* $n \geq 1$. *Demonstraţi că, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *numărul întregilor impari* $m \in \mathbb{N}^*$ *pentru care* $f(m) = n$ *este egal cu numărul întregilor pozitivi mai mici decât cel mult egali cu* n *şi coprimi cu* n *(adică* $\varphi(n)$*).*

???

Soluţie. (Laurenţiu Ploscaru) Notăm mai întâi că $\gcd(f(s), f(s+1)) = 1$, pentru orice $s \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, dacă ar exista o pereche astfel încât $(k,\ell) = (f(s), f(s+1))$ cu $\gcd(k,\ell) > 1$, atunci o putem alege pe cea cu $k+\ell$ minim, însă ea ar proveni din una dintre perechile $(k, \ell-k)$ sau $(k-\ell, \ell)$, fapt care ar intra în contradicţie cu minimalitatea alegerii făcute.

Ideea crucială este să pornim cu următoarea ipoteză de inducţie (care este de altfel mult mai puternică decât ceea ce ne sugerează cerinţa problemei)

> *Pentru orice pereche* $(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *de numere coprime, există şi este unic* $s \in \mathbb{N}^*$ *astfel ca* $f(s) = k$*, iar* $f(s+1) = \ell$.

Demonstraţia se face prin inducţie după $k + \ell$. Pasul de pornire (cu $k = \ell = 1$, pentru care $s = 1$, cu $f(1) = 1 = f(2)$) este trivial, iar pentru pasul ulterior de inducţie (când vom avea $k \neq \ell$) distingem două cazuri posibile

• dacă $k > \ell$, din inducţie există un unic $t \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(t) = k - \ell$ şi $f(t+1) = \ell$, ceea ce pentru $s = 2t+1$ implică $f(s) = k$ şi $f(s+1) = \ell$;
• dacă $k < \ell$, din inducţie există un unic $t \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(t) = k$ şi $f(t+1) = \ell - k$, ceea ce pentru $s = 2t$ implică $f(s) = k$ şi $f(s+1) = \ell$.

În ambele situaţii unicitatea lui s rezultă în mod evident din cea a lui t.

Acum nu ne mai rămâne decât să observăm că numărul de astfel perechi (k,ℓ) cu $k+\ell = n$ şi $\gcd(k,\ell) = 1$ este chiar $\varphi(n)$ (numărul întregilor pozitivi cel mult egali cu n şi coprimi cu n), căci $\gcd(k,n) = \gcd(k, n-k = \ell)$ pentru orice număr natural $1 \leq k \leq n-1$. Dar pentru acel unic s asociat perechii (k,ℓ), luând $m = 2s+1$ impar avem $f(m) = f(s) + f(s+1) = k + \ell = n$, şi invers, pentru orice $m = 2s+1$ impar pentru care $f(m) = n$ avem $n = f(s) + f(s+1)$, cu perechea $(k,\ell) = (f(s), f(s+1))$ cum trebuie.[6]

O soluţie elegantă (ca şi cea a Problemei 4 din Testul următor), pe care am detaliat-o pentru a obţine o claritate de cristal. □

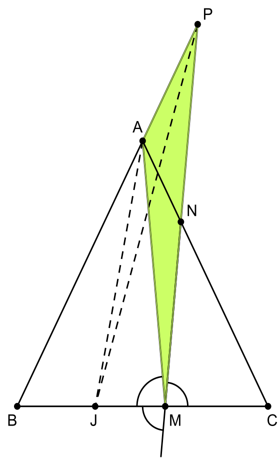
Conjugată cu Problema 3 din Testul următor, Problema 2 a constituit un eşec scontat, chiar dacă unii dintre selecţioneri îşi manifestă uimirea faţă de acest(e) rezultat(e) (ne)aşteptat(e).

[6]Toate aceste ultime consideraţii sunt pentru $n > 1$; cazul $n = 1$ fiind separat, şi trivial. Cu toate acestea, mica eroare din enunţ afectează acest caz $n = 1$, pentru care enunţul ar fi fost fals în forma prezentată.

3. Test Selecţie III către IMO

Subiectul (1)**.** *Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$, şi fie M şi N puncte pe laturile BC, respectiv CA, astfel încât unghiurile BAM şi CNM să fie egale. Dreptele AB şi MN se intersectează în punctul P. Demonstraţi că bisectoarele (interioare ale) unghiurilor BAM şi BPM se intersectează într-un punct aflat pe dreapta BC.*

Bogdan Enescu



Figura, curtoazie Andrei Eckstein

Soluţie. Soluţia oficială începe direct cu calcule din care rezultatul să reiasă prin teorema bisectoarei. Sunt însă lucruri de spus despre construcţia din problemă. Din cele date rezultă imediat că triunghiurile BAM şi CNM sunt asemenea, deci $\angle AMB = \angle NMC$, cu $\angle AMB + \angle AMN + \angle NMC = \pi$, de unde $\angle AMB < \pi/2$ (la limită, dacă $\angle AMB = \pi/2$, atunci M este mijlocul laturii BC, $N \equiv A \equiv P$, cele două bisectoare coincid, şi este puţin cam grosolan a zice că ele se intersectează pe dreapta BC, căci se intersectează "peste tot"; acesta este un veritabil caz degenerat). Prin urmare punctul M nu se poate afla pe jumătatea laturii BC dinspre B, căci atunci am avea $\angle AMB > \pi/2$, deci trebuie $MC < MB$. Consecinţa este că punctul P se va afla de aceeaşi parte a dreptei BC ca şi A.[7]

Să examinăm acum triunghiul APM. Evident dreapta MB este chiar bisectoarea exterioară din vârful M, iar bisectoarea interioară a unghiului BAM este bisectoare exterioară din vârful A; ele se intersectează într-un punct J pe BC care este centrul cercului exînscris triunghiului APM relativ la vârful P, deci se află pe bisectoarea interioară a unghiului BPM. Niciun calcul. Look, ma'! no hands ... □

[7]O figură "greşită", unde P şi A se află de părţi diferite ale dreptei BC, duce la o "soluţie" trivial imediată; se pare, evitată de concurenţi.

Lăsând gluma laoparte, **ratarea** acestui argument în soluţia oficială, care se oboseşte în a calcula varii rapoarte, este un fapt care pe mine mă îngrijorează; relativ la cât timp a fost petrecut în analiza problemei, şi de asemenea la completa trivialitate a soluţiei, care nu o face demnă nici măcar de o problemă pentru Juniori. De altfel rezultatele obţinute arată că este o întrebare inutilă, pe care **toată** lumea a primit scor maxim (cu, vai, un notabil şi regretabil accident). Pusă în balanţă cu Problema 3, la polul diametral opus (vezi comentariile mai jos), s-a ajuns astfel la un Test de Selecţie format din doar (celelalte) 2 probleme.

Remarcă. Ediţie ultima oră! Site-ul `http://www.mategl.com/` semnalează problemele concursului "Laurenţiu Duican" de la Braşov. În aceeaşi zi, la acest concurs inter-judeţean de calibru relativ redus, cu probleme de clasă dintre cele mai uşoare, problema de mai sus a fost întrebată pe poziţia 2 la clasa a VII-a, jumătate dintre participanţi obţinând notă maximă (*à propos*, autorul n-are nicio vină în proasta alegere pentru Test). Unde tragem linia? Cine veghează ca astfel de ciudăţenii să nu se petreacă? Conul de umbră aruncat asupra întregului proces de selecţie trimite la eclipsa la care mă refer ceva mai jos ...

Subiectul (2). *Pentru orice întreg pozitiv n, fie $\sigma(n)$ suma divizorilor săi pozitivi (1 şi n inclusiv). Demonstraţi că un întreg pozitiv n, care are cel mult doi factori primi distincţi, satisface condiţia $\sigma(n) = 2n - 2$ dacă şi numai dacă $n = 2^k(2^{k+1} + 1)$, unde k este număr natural, iar $2^{k+1} + 1$ este număr prim.*

???

Remarcă. Desigur, atunci $k + 1$ este o putere a lui 2, iar $2^{k+1} + 1$ este un număr prim al lui Fermat. Soluţia oficială listează numerele

$$3 = 2^0(2^1 + 1), 10 = 2^1(2^2 + 1), 136 = 2^3(2^4 + 1), 128 \cdot 257 = 2^7(2^8 + 1),$$

dar nu şi $32768 \cdot 65537 = 2^{15}(2^{16} + 1)$, de parcă ultimul număr prim Fermat cunoscut n-ar fi meritat popularizarea ... Este **meritorie** Remarca despre numerele "perfect-plus-two" (pp2) şi proprietăţile lor (în cea mai mare parte necunoscute), dar parcă ar fi trebuit spus şi că această caracterizare a unora dintre numerele pp2 este folclor, cunoscută în literatură; prin urmare încă o problemă care nu face decât să repete fapte teoretice cunoscute.

Subiectul (3). *Determinaţi cea mai mică valoare a constantei reale c pentru care*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j \right)^2 \leq c \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

pentru toate numerele naturale nenule n şi toate numerele reale pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

???

Soluţie. Celebra inegalitate a lui Hardy spune că, pentru orice şir $(x_k)_{k\geq 1}$ de numere reale ne-negative (care nu este identic nul), şi pentru orice număr real $p > 1$, avem

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{k=1}^{\infty}x_k^p$$

iar $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ este cea mai bună constantă. Pentru $p = 2$, fixând $n \geq 1$ şi luând $x_k = 0$ pentru $k > n$, obţinem

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right) < 4\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

Dar

$$0 < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n},$$

şi deci toate ingredientele sunt prezente pentru a clama rezultatul $\boxed{c = 4}$. Dacă într-adevăr simţim nevoia, se poate arăta uşor, ca în soluţia oficială, că există o constantă $C > 0$ (a cărei valoare nici măcar nu trebuie precizată) pentru care, luând $x_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ pentru orice $1 \leq k \leq n$, să avem

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^2 > 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - C = 4\sum_{k=1}^{n}x_k^2 - C.$$

Dar atunci

$$c\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - C \quad \text{se scrie} \quad (c-4)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > -C,$$

ceea ce forţează $c \geq 4$ (din faptul că seria armonică este divergentă). □

Remarcă. Ce s-ar fi întâmplat dacă un concurent ar fi scris – sec "este inegalitatea lui Hardy"? Nota 0, evident. La ce bun cerem în concurs re-demonstrarea unor rezultate esenţiale, bine-cunoscute, şi aparţinând unui domeniu matematic distant de cerinţele IMO? Rezultatele sunt pe măsură; o notă de 5/7 şi tot restul 0. Sugerez, pentru barajele următoare, alte inegalităţi – Carleman, Pólya-Knopp, Karamata, Brunn-Minkowski, etc.

Subiectul (4). *Fie n un număr natural nenul, şi fie A_n, respectiv B_n, mulţimea întregilor ne-negativi $k < n$ pentru care numărul divizorilor primi distincţi ai lui* $\mathrm{cmmdc}(k, n)$ *este par, respectiv impar. Demonstraţi că avem $|A_n| = |B_n|$ dacă n este par, şi că avem $|A_n| > |B_n|$ dacă n este impar.*

???

Soluţie. (Laurenţiu Ploscaru) Definim funcţia $f(n) = |A_n| - |B_n|$. Evident $f(1) = 1$. Să observăm că dacă n este un număr natural divizibil cu un număr prim p, atunci $\gcd(x, n)$ şi $\gcd(x + nk, pn)$ au aceiaşi factori primi, oricare ar fi numerele x şi k. Or, aceasta înseamnă că dacă $x \in X_n$, atunci $\{x, x+n, x+2n, \ldots, x+(p-1)n\} \subset X_{np}$, unde $X \in \{A, B\}$. Rezultă imediat că $|A_{np}| = p|A_n|$ şi $|B_{np}| = p|B_n|$, deci $f(np) = pf(n)$.

Prin urmare este suficient să tratăm cazul $n = \prod_{i=1}^{s} p_i$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_s$ sunt numere prime distincte. Să remarcăm acum următoarele detalii

• contribuţia unui un număr x în $f(n)$ este $\mu(d)$, unde $d = \gcd(x, n)$, iar μ este funcţia lui Möbius;

• sunt $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ numere x cu proprietatea că $d = \gcd(x, n)$.

Aşadar $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$, şi eventual putem obţine folosind formula de inversiune a lui Möbius şi că $\varphi(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Acum un clasic argument tip PIE (Principiul Includerii/Excluderii) duce la formula

$$f(p_1p_2\cdots p_s) = (p_1 - 2)(p_2 - 2)\cdots(p_s - 2).$$

Notând $\operatorname{rad}(n) = \prod_{p|n,\ p \text{ prim}} p$, rezultă că

$$f(n) = \frac{n}{\operatorname{rad}(n)} f(\operatorname{rad}(n)) = \frac{n}{\operatorname{rad}(n)} \prod_{p|n,\ p \text{ prim}} (p - 2),$$

aşadar $f(n) \geq 0$, cu $f(n) = 0$ dacă şi numai dacă $2 \mid n$, adică n este par. $\square$

Nicio problemă de combinatorică. Nicio veritabilă problemă de geometrie sintetică. Un Test de topologie generală este poate în durerile facerii. În faţa unui destin ineluctabil nu-mi rămâne decât sarcasmul, şi eleganta speranţă a unei eclipse sau apocalipse.

4. ADDENDUM BMO 2014

Subiectul (1)**.** *Fie $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $xy + yz + zx = 3xyz$. Demonstraţi că*

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3$$

şi determinaţi cazurile de egalitate.

Remarcă. Cel care a postat prima dată Problema 1 pe AoPS a prezentat de fapt sistemul derivatelor parţiale din metoda multiplicatorilor Lagrange. Fie $R(x, y, z) = xy + yz + zx - 3xyz$ şi

$$L(x, y, z; \lambda) = x^2y + y^2z + z^2x - 2(x + y + z) + 3 - \lambda R(x, y, z),$$

definită pentru $x, y, z > 0$ şi parametrul real λ. Sistemul derivatelor parţiale egalate cu zero este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} & = & 2xy + z^2 - 2 - \lambda(y + z - 3yz) & = & 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} & = & 2yz + x^2 - 2 - \lambda(z + x - 3zx) & = & 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} & = & 2zx + y^2 - 2 - \lambda(x + y - 3xy) & = & 0 \end{cases}.$$

Dar acest sistem este sensibil mult mai greu de soluţionat decât problema propriu-zisă. Morala – nu tot ce zboară se mănâncă! Uneori această metodă este prea complicată, şi oricum neavenită în cazul acestei inegalităţi banale, care cedează la orice metode elementare.

Când a fost prima dată postată pe AoPS, Problema 2 a apărut într-o versiune greşită, ca mai jos (cu pătrate perfecte în loc de cuburi). Această versiune incorectă merită totuşi discutată, căci oferă chiar o caracterizare completă (şi într-un fel este mai interesant teoretică decât versiunea corectă).

Subiectul (2'). *Un număr* ***special*** *este un număr natural nenul n pentru care există numere naturale nenule a, b, c şi d astfel încât*

$$n = \frac{a^2 + 2b^2}{c^2 + 2d^2}.$$

Demonstraţi că

i) există infinit de multe numere speciale;
ii) 2014 nu este un număr special.

Soluţie. Ca şi în versiunea corectă (cu cuburi), punctul i) este ridicul prin trivialitatea sa; luând în mod arbitrar $c, d, k \in \mathbb{N}^*$ şi $a = kc$, $b = kd$, obţinem $\dfrac{a^2 + 2b^2}{c^2 + 2d^2} = k^2$, aşadar toate pătratele perfecte nenule $n = k^2$ sunt speciale. La fel de simplu este să luăm $c = d = 1$ şi $a \equiv \pm b \pmod 3$.

Mai interesant este că avem identitatea

$$(x^2 + 2y^2)(u^2 + 2v^2) = (xu \pm 2yv)^2 + 2(xv \mp yu)^2,$$

care provine din faptul că în inelul Euclidian (deci UFD, cu factorizare unică) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, norma $N(x + y\sqrt{-2}) = x^2 + 2y^2$ este multiplicativă, ceea ce arată că toate numerele $\boxed{n = x^2 + 2y^2}$ sunt speciale. Ideea de a ne uita în $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ne sugerează şi soluţia punctului următor.[8]

[8]Numerele prime impare p din $\mathbb{Z}_+$ care rămân prime şi în $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ sunt exact cele pentru care $p \equiv 5, 7 \pmod 8$, adică cele pentru care -2 nu este rest pătratic modulo p. Un text comprehensiv despre aceste extensii pătratice este (vezi în speţă pagina 142)

`http://www.math.wisc.edu/ mmwood/weston.pdf`,

din păcate cu anume erori de tipar, exact acolo unde priveşte primele din $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

ii) Egalitatea $a^2+2b^2 = 2014(c^2+2d^2) = 2\cdot 19\cdot 53(c^2+2d^2)$ nu poate avea loc, din cauza factorizării unice, şi din faptul că $53 \equiv 5 \pmod 8$ este prim în $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Mai direct, din $53 \mid u^2+2v^2$ rezultă $u \equiv v \equiv 0 \pmod{53}$, căci -2 nu este rest pătratic modulo 53. Dar atunci rezultă $a \equiv b \equiv 0 \pmod{53}$, deci $c \equiv d \equiv 0 \pmod{53}$, şi un raţionament de coborâre infinită pune în evidenţă contradicţia.

Din cele de mai sus, **singurele** numere n speciale sunt cele unde, pentru orice prim $p \mid n$, dacă $p \equiv 5, 7 \pmod 8$ atunci p apare la exponent par în n (şi deoarece $2014 = 2\cdot 19\cdot 53$ şi $53 \equiv 5 \pmod 8$, înseamnă că 2014 nu este special). Dar aceste numere sunt exact cele reprezentabile sub forma $\boxed{n = x^2+2y^2}$, găsite la punctul i). Acesta este un răspuns final şi complet, oferind caracterizarea precisă a numerelor speciale. $\square$

Remarcă. Revenind la cuburi, o interesantă digresiune este următoarea problemă de pe ShortList IMO 1999.

> Demonstraţi că orice număr raţional pozitiv $r \in \mathbb{Q}_+^*$ poate fi reprezentat ca $r = \dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$ pentru anume numere întregi pozitive $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_+^*$.

(Se vede de aici importanţa unui coeficient (la noi egal cu 2) diferit de 1.)

Subiectul (4)**.** *Fie n un număr natural nenul. Un hexagon regulat de latură n este partiţionat în triunghiuri echilaterale de latură 1 prin drepte paralele la laturile sale. Calculaţi numărul de hexagoane regulate formate de vârfuri ale acestor triunghiuri echilaterale.*

Remarcă. Un user pe AoPS remarcă faptul că răspunsul

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

este menţionat deja într-o contribuţie a lui Ignacio Larrosa Cañestro din 15 octombrie 2006 la `http://oeis.org/A000537` (vezi şi alte interesante observaţii făcute acolo, referitoare la numărarea de romburi, sau de subcuvinte). *There is no new thing upon the Earth.*

Bogdan Enescu îmi atrage atenţia asupra Problemei 4, BMO 1995, care foloseşte ca rezultat intermediar numărarea pătratelor cu vârfuri în nodurile unei latice pătrate $n \times n$ ca fiind $\dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$ (la care făceam referinţă în materialul meu). Nu pot decât să vă trimit la minunata ei prezentare, din la fel de minunata carte recent apărută [M. BECHEANU & B. ENESCU – *Balkan Mathematical Olympiads; the first 30 years (1984-2013)*], pp. 87-88, XYZ Press (2014). Este chiar amuzant, dar şi interesant, cum aproape 20 de ani mai târziu (ca Cei Trei (patru) Muşchetari), chestiunea numărării de figuri speciale în latice plane îşi face reapariţia într-o altă ipostază.

Un ultim comentariu legat de BMO 2014, anume acordarea medaliilor. Ar fi fost mai potrivit ca Aur să se fi atribuit şi celor cu 39 de puncte. Motivele sunt multiple. Un precedent există – BMO 2012, unde chiar cota a fost depăşită cu mult mai mult decât ar fi fost acum; s-ar fi evitat situaţia jenantă de a necesita scor maxim pentru Aur; singurul concurent cu 39 de puncte de pe tabloul principal era din Bulgaria – ţara gazdă, şi ocupanta locului II în clasamentul (neoficial) pe naţiuni – fără medalii de Aur! Pe tabloul secundar erau doi concurenţi cu 39 de puncte, unul din Italia (depunctat la Problema 4 pentru o trivială eroare de calcul), şi unul din Uzbekistan (**singurul** component al echipei!), ţară care a preferat să nu expună rigorilor unui concurs internaţional copii poate prea puţin pregătiţi. De altfel, mi-am exprimat personal simpatia faţă de prietenii bulgari şi italieni pentru acest deznodământ nefericit.

5. Încheiere

Nu voi repeta diatriba din încheierea materialului meu asupra Testelor de Juniori, dar cele spuse acolo se aplică aidoma şi aici. O insuficientă reflecţie asupra conţinutului acestor Teste duce la probleme nepotrivite, şi o selecţie în care arbitrariul joacă un rol neavenit. Corectura discutabilă şi lipsa contestaţiilor oficiale se combină în a adăuga la acest arbitrariu. Rezultatul palpabil este alienarea unora dintre cei mai buni olimpici. Sigur, suntem ca lutul (sau plastilina) în mâinile zeilor (cum zicea Alexandru Mitru, povestind marile mituri ale omenirii), dar zeii au murit (*apud* Nietzsche).

În plus, la Testele de Seniori, continuă ţinerea în secret a autorilor, sau a originii problemelor (câte dintre ele originale?); nu de alta, da' vreau să ştiu şi eu pe cine laud ... Iar calitatea grafică a fişierului cu rezultate lasă mult de dorit; antetele sunt prost aliniate, lipsesc multe diacritice, lipsesc numele unor elevi calificaţi în lot, apar unele "însemne" oculte, ca "neofici" şi "calificat", nu se specifică linia de *cut-off* pentru lotul restrâns de 12-14. De ce mai totul îmi dă impresia unei trebi făcute de mântuială?