COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015
ETAPA NAŢIONALĂ – LICEU

Abstract. Comments on some of the problems presented at the 2015 National Round of the National Mathematics Olympiad.

Se adresează claselor IX, X, XI, XII.
Data: 13 aprilie 2015.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

Ecce cor meum

0. Introducere

Aceste comentarii asupra Etapei Naţionale a Olimpiadei de Matematică 2015 reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Clasa a IX-a

Subiectul (1)**.** *Arătaţi că nu putem alege* 45 *de elemente distincte ale mulţimii* $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{2015}\}$*, în aşa fel încât numerele selectate să fie în progresie aritmetică.*

Soluţie. Conflictul de raţionalitate dat de $\sqrt{m} + \sqrt{p} = 2\sqrt{n}$ se rezolvă doar prin m, n, p având acelaşi "squarefree core"

$$\operatorname{core}_2(m) = \operatorname{core}_2(n) = \operatorname{core}_2(p) = d,$$

adică $m = a^2 d$, $n = b^2 d$, $p = c^2 d$, cu d liber de pătrate şi $a + c = 2b$ (şi nu $n = 2b^2 d$, ca în soluţia oficială). Aceasta forţează ca progresia aritmetică a celor 45 de elemente să fie amplificarea unei progresii aritmetice de 45 de întregi pozitivi cu rădăcina pătrată $\sqrt{d}$ a unui întreg liber de pătrate; dar cum $45^2 = 2025 > 2015$, acest lucru este imposibil (putem alege doar cel mult 44 de elemente în progresie aritmetică). ☐

Corectura la această problemă a dus la multe contestaţii, rezolvate prin creşterea considerabilă a notelor iniţial acordate (reminiscent de problema 3, tot de la clasa a IX-a, de la etapa municipiului Bucureşti). Aferim!

[1]Lipsesc unele probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Soluţiile oficiale, baremele de corectare şi rezultatele finale (după contestaţii) pot fi consultate la `http://onm2015.ssmr.ro/`.

Subiectul (4)**.** *Fie $a, b, c, d \geq 0$ numere reale astfel încât $a+b+c+d=1$. Arătaţi că*

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-d)^2}{6}+\frac{(d-b)^2}{6}}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \leq 2.$$

Soluţie. Este pentru prima dată când ajung să am în faţa ochilor o astfel de inegalitate asimetrică şi aciclică. Inegalitatea ajutătoare, exhibată prin "deus ex machina" în soluţia oficială, pentru $x, y \geq 0$ cu $x+y \leq 1$

$$2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2-(x-y)^2=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2) \geq 0,$$

şi care provine dintr-un Cauchy-Schwarz

$$2 \geq (1+1)(x+y) \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2,$$

este destul de obscură, şi aparent nejustificată. Desigur, aceasta face, după manipulări elementare, ca

$$a+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-d)^2}{6}+\frac{(d-b)^2}{6} \leq 1-\frac{1}{3}(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2,$$

ceea ce reduce inegalitatea la o elementară relaţie într-o singură variabilă "unificată" $S=\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$. Metoda este însă ezoterică, ceea ce a făcut ca toţi să primească cel mult 1 punct; mai mult, este cu totul irelevantă pentru aşteptările pe care le avem la stăpânirea cunoştinţelor de clasa a IX-a. $\square$

2. CLASA A X-A

Subiectul (1)**.** *Să se găsească tripletele (a, b, c) de numere complexe nenule având acelaşi modul, care verifică egalitatea*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1=0.$$

Soluţie. Notând cu α, β, γ cele trei fracţii, rezultă că α, β, γ sunt de modul 1, cu $\alpha+\beta+\gamma+1=0$, şi prin conjugare de asemenea $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1=0$. Rezultă imediat $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=0$. Oricare dintre ele fiind -1 conduce la celelalte două fiind opuse. Rezultă $(a, b, c)=(a, \pm a, \mp a)$ pentru $a \in \mathbb{C}^*$ arbitrar. $\square$

Soluţie Alternativă. Cu notaţiile de mai sus rezultă că punctele de afixe $\alpha, \beta, \gamma, 1$ fiind conciclice, sunt vârfurile unui dreptunghi, deci unul dintre α, β, γ este egal cu -1, iar celelalte două sunt opuse. Ca de foarte multe ori, interpretarea geometrică este mult mai luminoasă. $\square$

Subiectul (4)**.** *Fie A o mulţime finită de numere reale. Fie şi mulţimile*

$$S=\{x+y \mid x, y \in A\}, \ D=\{x-y \mid x, y \in A\}.$$

Să se arate că

$$\operatorname{card}(A) \cdot \operatorname{card}(D) \leq \operatorname{card}(S)^2.$$

Soluţie. Cu alte cuvinte, avem de demonstrat $|A| \cdot |A - A| \le |A + A|^2$.[2] Problema 3 a primului test de selecţie IMO din 2012 a fost (fac prezentarea în limba engleză, din **RMC 2012**).

> Given two finite sets A and B of real numbers, and an element x of their Minkowski sum $A + B$, show that
> $$|A \cap (x - B)| \le \frac{|A - B|^2}{|A + B|}.$$
>
> *Solution.* Rewrite the inequality as
> $$|\{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in A + B, a + b = x\}| \le |(A - B) \times (A - B)|.$$
> Next, define an injection of the set on the left-hand side into the set on the right-hand side, as follows. Choose, for each $c \in A + B$, elements $a_c \in A$ and $b_c \in B$, such that to have $c = a_c + b_c$, and assign to each triple (a, b, c) in the set on the left-hand side the pair $(a - b_c, a_c - b)$. Using the identity $c = x - (a - b_c) + (a_c - b)$, it is readily checked that the assignment is injective. The conclusion follows. ■

Luând $B = -A$, putem lua $x = 0 \in A - A = A + B$, şi inegalitatea devine exact cea dorită. Inegalitatea cerută este şi un caz ultra-particular al următorului rezultat din notele de curs de combinatorică aditivă ale lui Terence Tao, pagina 8.[3]

> LEMMA. (Imre Ruzsa) If U, V, W are three non-empty finite subsets of an abelian group Z, then
> $$|V - W| \le \frac{|U + V| \cdot |U + W|}{|U|}.$$

Demonstraţia este asemănătoare (şi poate fi citită la link-ul dat). Nu ne rămâne decât să luăm $U = V = W = A$. □

Cu toate acestea, salut alegerea acestei probleme! S-a dovedit o excelentă problemă de departajare, şi în plus, o combinatorică – pe gustul inimii mele.

3. CLASA A XI-A

Subiectul (1)**.** *Să se determine funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:*

i) $f'(x) = 0$, *pentru orice* $x \in \mathbb{Z}$;
ii) pentru $x \in \mathbb{R}$, *dacă* $f'(x) = 0$, *atunci* $f(x) = 0$.

[2] Cititorul ar trebui de-acuma să fie familiarizat cu notaţiile "sumset" Minkowski pentru suma şi diferenţa de mulţimi.

[3] http://www.math.cmu.edu/~af1p/Teaching/AdditiveCombinatorics/Tao.pdf

Soluţie. Fie $Z(\varphi)$ mulţimea punctelor în care se anulează o funcţie reală φ. Din ipoteze avem $\mathbb{Z} \subseteq Z(f') \subseteq Z(f)$. Dacă $Z(f)$ nu ar fi densă în $\mathbb{R}$, ar exista un punct $x \in \mathbb{R}$ şi un $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap Z(f) = \emptyset$. Deoarece mulţimea $Z(f)$ este nemărginită la ambele capete, valorile extreme $\alpha = \sup\{r \in Z(f) \mid r < x\} \leq x - \varepsilon$ şi $\beta = \inf\{r \in Z(f) \mid r > x\} \geq x + \varepsilon$ există şi sunt finite. Vom avea atunci $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$ şi $(\alpha, \beta) \cap Z(f) = \emptyset$. Din teorema lui Rolle, va exista $\gamma \in (\alpha, \beta)$ cu $f'(\gamma) = 0$, deci şi $f(\gamma) = 0$, adică $\gamma \in Z(f)$, absurd.

Prin urmare $Z(f)$ este densă în $\mathbb{R}$, ceea ce forţează $\boxed{f \text{ identic nulă}}$ (care evident verifică ipoteza). Singurul lucru care contează la punctul i) este că f' se anulează într-o mulţime nemărginită la ambele capete. Soluţia oficială preferă să lucreze cu teoremele lui Weierstrass şi Fermat, ducând la o argumentaţie ceva mai greoaie. $\square$

Subiectul (2)**.** *Fie $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ o matrice cu $\operatorname{tr}(A) = 0$ şi cu proprietatea că $I_5 - A$ este inversabilă. Să se arate că $A^5 \neq I_5$.*

Soluţie. Singurul lucru pe care îl deducem din $I_5 - A$ inversabilă este că 1 nu este valoare proprie a lui A. Presupunem prin absurd $A^5 = I_5$. Atunci valorile proprii ale lui A sunt printre rădăcinile primitive de ordinul 5 ale unităţii $\{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$, unde $\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}$. Dar $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, deci $\Re\,\omega^k \equiv \pm\frac{\sqrt{5}}{4} \pmod{\mathbb{Q}}$ pentru $1 \leq k \leq 4$. O sumă de un număr impar de astfel de valori nu poate fi $\equiv 0 \pmod{\mathbb{Q}}$, şi cum 5 este impar, $\operatorname{tr}(A) = 0$ va fi imposibil, contradicţie. Folosind faptul că $\Phi_p(X)$ este ireductibil pentru p prim, se poate generaliza problema la orice p prim, nu doar 5. $\square$

Subiectul (3)**.** *Fie $a \geq 0$ şi $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale. Să se arate că dacă şirul $\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n^a}\right)_{n\geq 1}$ este mărginit, atunci şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ definit prin $y_n = \frac{x_1}{1^b} + \frac{x_2}{2^b} + \cdots + \frac{x_n}{n^b}$ pentru $n \geq 1$ este convergent pentru orice $b > a$.*

Soluţie. Dovedirea faptului că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy este destul de tehnică, notând $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_n$, de unde $x_n = s_n - s_{n-1}$, şi inversând printr-o sumare de tip Abel expresia $y_{m+n} - y_n$, apoi folosind faptul că seria zeta $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ este convergentă pentru $s = 1+(b-a)$ număr real supraunitar. Aceasta a fost problema de departajare, şi nu problema 4, o algebră liniară esenţialmente trivială, bazată pe faptul că, pentru A, B matrici pătrate cu A inversabil, şi $p(X)$ polinom, avem $p(BA) = A^{-1}p(AB)A$. Doar patru lucrări peste nota 4. $\square$

4. Clasa a XII-a

Subiectul (1)**.** *Fie $(R, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că, pentru orice element $x \in R$, există două elemente e_1 şi e_2 din R, astfel încât $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, şi $x = e_1 e_2$. Arătaţi că:*

(a) 1 este singurul element inversabil al inelului R; şi
(b) $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in R$.

Soluţie. Nu voi insista asupra soluţiei propriu-zise, ci voi face doar câteva precizări de terminologie; problema afirmă că un inel (unitar) în care orice element este un produs de două idempotente este inel Boolean. Orice inel Boolean este de caracteristică 2, şi este comutativ (soluţia oficială chiar către acest lucru se îndreaptă, arătând că idempotentele inelului sunt situate în centrul său). Teorema de reprezentare a lui Stone precizează structura algebrelor Booleene; un caz particular simplu este $(R, +, \cdot) = (\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$. O problemă simpatică, dar care îşi are chichiţele ei în rezolvare. Rezultate mult mai generale, despre proprietăţi ale inelelor unde orice element este un produs de idempotente, sunt disponibile. □

Subiectul (2)**.** *Fie $(K, +, \cdot)$ un corp finit cu cel puţin patru elemente. Arătaţi că mulţimea K^* poate fi partiţionată în două submulţimi nevide A şi B, cu proprietatea că*

$$\sum_{x \in A} x = \prod_{y \in B} y.$$

Soluţie. (M. Bocanu) Când caracteristica lui K este 2, ecuaţia $x^2 - 1 = 0$ se scrie $(x-1)^2 = 0$, deci are doar soluţia $x = 1$. Pentru orice alt element $y \neq 0$ vom avea deci $y^{-1} \neq y$. Putem atunci lua $A = \{1\}$, $B = K^* \setminus \{1\}$, căci vom avea

$$\sum_{a \in A} a = 1 = \prod_{\{y, y^{-1}\} \subset B} y \cdot y^{-1} = \prod_{b \in B} b.$$

Când caracteristica lui K este $p \neq 2$, ecuaţia $x = -x$ are doar soluţia $x = 0$. Fie un element k diferit de 0, 1 şi -1. Putem atunci lua $B = \{1, -1, -k\}$, $A = K^* \setminus \{1, -1, -k\}$, căci

$$\sum_{a \in A} a = k + \sum_{\{x, -x\} \subset A} (x + (-x)) = k = 1 \cdot (-1) \cdot (-k) = \prod_{b \in B} b.$$

Evident, aceste partiţii nu sunt în mod necesar singurele posibile.[4] □

[4] Este de remarcat că enunţul face **în mod tacit** uz de faptul că un corp finit este **comutativ**; altfel $\prod_{y \in B} y$ nu ar fi definit. Soluţia oficială se cam complică, după ce stabileşte condiţia echivalentă $\left(\sum_{a \in A} a\right) \cdot \left(\prod_{a \in A} a\right) = -1$ (evident, îndeplinită de exemplele date), dar apoi introduce nişte consideraţii polinomiale, care sunt demonstrate ca fiind inutile şi prea alambicate de către simpla linie de raţionament de mai sus.

Subiectul (4). *Determinaţi funcţiile polinomiale neconstante*

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^*$$

cu coeficienţi raţionali, care au proprietatea că pentru orice $x \in [0,1]$ *există două funcţii polinomiale* $g_x, h_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *cu coeficienţi raţionali, astfel încât* $h_x(x) \neq 0$ *şi*

$$\int_0^x \frac{1}{f(t)}\,dt = \frac{g_x(x)}{h_x(x)}.$$

Soluţie. Problema conţine un preambul păcătos şi în mare măsură irelevant. "Localizarea" în x a relaţiei integrale dispare (prin considerente legate de cardinalitate $\aleph_0 < \mathfrak{c}$), şi se reduce la relaţia "globală"

$$\int_0^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = \frac{g(x)}{h(x)}$$

pentru anume $g, h \in \mathbb{Q}[x]$ coprime, peste o mulţime perfectă $S \subseteq [0,1]$, aşa ca şi $h(x) \neq 0$ pentru $x \in S$, de unde (prin derivare, permisă pe S)

$$f(x)(g'(x)h(x) - g(x)h'(x)) = h(x)^2$$

pentru $x \in S$, care se extinde evident la $f(g'h - gh') = h^2$ în $\mathbb{Q}[x]$.

Aceasta este veritabila problemă; o ecuaţie funcţională polinomială (care nu mai are de-a face cu materia clasei a XII-a) care conduce la soluţiile $f(x) = a(x-r)^n$, cu $a, r \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, $r \notin [0,1]$, $n \geq 2$.

Sau din lipsa timpului (celelalte probleme au consumat destul; problema 3 n-a fost nici ea rezolvată complet de nimeni), sau din preambulul inoportun, nimeni nu a primit mai mult de 1 punct pe această problemă. □

Clasele finale de gimnaziu (VIII) şi liceu (XII) au avut astfel de suferit din cauza unei alegeri cu totul nejudicioase a problemelor.

5. ÎNCHEIERE

În spiritul – de acuma obişnuit – al superficialităţii invazive şi pervazive în mai toate domeniile societăţii, deci şi Societăţii de Ştiinţe Matematice din România, comunicatul de presă[5] prealabil produs conţine următoarele perle

- ... celei de **a 66 - a Olimpiadă Naţională** ..., în loc de ... celei de **a 66 - a Olimpiade Naţionale** ...;
- Gazeta Matematică care; o cacofonie uşor de evitat ...;
- joi, 10 aprilie; evident, joi este 9 aprilie;
- ... Universităţii de Politehnică, în loc de ... Universităţii Politehnice.

Un amănunt hazliu este că acest comunicat de presă anunţă desfăşurarea concursului pentru toate clasele, de la a V-a la a XII-a, la Liceul Tehnologic de Metrologie "Traian Vuia". Când un cititor remarcă pe Facebook SSMR că de fapt clasele a V-a şi a VI-a susţin proba la Liceul Teologic Adventist "Ştefan Demetrescu", i se răspunde că "pe hartă, vorbim de 2 clădiri vecine";

[5] `http://ssmr.ro/comunicate_presa/ONM_2015`

desigur, dar totuşi instituţii diferite – dar nu dădea bine referinţa la un liceu teologic ?!? De obicei, liceele cele mai de vază din oraşul unde se petrece olimpiada "se bat" pentru a o găzdui; m-aş fi aşteptat să asist la o concurenţă acerbă între liceele Gheorghe Lazăr, Mihai Viteazul, sau Sfântul Sava ... dar olimpiada a fost relegată la periferia Bucurescilor.

În fine, o mică (mare) inexactitate. În comunicat se specifică Prima ediţie a avut loc la începutul secolului al douăzecilea .... Dar într-o notă istorică[6] semnată de Mircea Trifu, citim

> După 1949, concursurile Gazetei Matematice au fost sistate. Apar olimpiadele de matematică ale elevilor, structurate pe etape (locală, judeţeană, naţională). La început a existat şi Olimpiada micilor matematicieni pentru elevii claselor V-VII (VIII), dar mai apoi, la clasele V-VI s-a desfiinţat etapa republicană.

Nu sunt un mare specialist în istoria olimpiadei, dar are sens – dacă prima ediţie a fost în anul 1950 (care numai "începutul secolului XX" nu este), atunci ediţia a 66-a cade exact în 2015.

Şi dacă tot vorbim de site-ul Societăţii de Ştiinţe Matematice din România (SSMR),[7] o întâmplare a făcut să utilizez link-ul oferit (la "Legături utile", pe latura dreaptă a paginii) pentru **MASSEE**; distraţi-vă să daţi un click! În plus, mi se pare doar mie, sau un cuplu de comentarii mai negative (cu privire la organizare) au dispărut / au fost ascunse / pe contul Facebook al SSMR?[8] Dacă da, este o practică considerată a fi reprobabilă ...

Menţinerea site-ului Olimpiadei Naţionale a fost însă aproape ireproşabilă. Enunţurile şi soluţiile, rezultatele, şi celelalte informaţii, toate au apărut în timp util; listele au fost frumos formatate şi uşor de consultat – din toate punctele de vedere, o mare îmbunătăţire faţă de anii trecuţi.

Cel puţin s-au evitat erori mari la această etapă naţională. A apărut o (singură) problemă combinatorică. Problema 4, clasa a IX-a, putea profita de un mic ajutor printr-un punct suplimentar preliminar, care să indice inegalitatea auxiliară de folosit; în lipsa lui, rezultatele au fost catastrofice. Iar clasa a XII-a a devenit iarăşi disproporţionat de grea. Una peste alta, un concurs neomogen, cântărit cam în grabă, cu o anume lipsă de viziune generală. După gradul extrem de scăzut de dificultate la fazele locală şi judeţeană, etapa naţională l-a exagerat şi exacerbat cu unele probleme, la unele clase. Este un comportament care crează un clivaj – tehnic inclus,

[6] `http://www.gazetamatematica.net/?q=node/26`

[7] `http://rms.unibuc.ro/`

[8] Nu mă pricep prea mult la felul cum funcţionează Facebook, dar când site-ul anunţă $\boxed{\text{Vezi încă 3 comentarii}}$ şi după click apar doar încă două, poate că exact asta înseamnă, că unul a fost ascuns?

fără conotaţii pejorative, în schizofrenie. Salturile extreme sunt derutante şi descurajante pentru concurenţi.

Iar trecerea în continuare sub tăcere a numelor autorilor este neplăcută şi frustrantă. Eu, cel puţin, sunt curios să le aflu, din motive uşor de înţeles!

O altă decizie de ultimă oră a fost modificarea formulei de *carry-over* a punctajelor de la clasă, la $10(1 - D/P)$ (cu 10 înlocuind 20), unde D este diferenţa de punctaj faţă de primul clasat, iar P este punctajul primului clasat. Cel mai bine este evident $0(1 - D/P) = 0$, întreaga idee de *carry-over* fiind o decizie individuală şi arbitrară.