COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014
TESTE DE SELECŢIE SENIORI

Abstract. Comments on some of the problems asked at the Senior Selection Tests after the National Mathematical Olympiad of 2014.

Se adresează claselor VIII, IX, X, XI, XII.
Data: 7 iunie 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

Qui male agit odit lucem[1]

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Testelor de Selecţie Seniori IV / V din 2014 reflectă opinia personală a autorului (Testele II / III au fost deja comentate într-un material precedent).[2] La început apare şi un addendum la Testul de Selecţie II.

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Addendum Test Selecţie II către IMO

Subiectul (2)**.** *Fie $a \in (0,1)$, fie $n \in \mathbb{N}^*$, şi fie $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f_n(x) = x + x^2/n$. Demonstraţi că*

$$\frac{a(1-a)n^2 + 2a^2n + a^3}{(1-a)^2n^2 + a(2-a)n + a^2} < (\underbrace{f_n \circ \cdots \circ f_n}_{de\ n\ ori})(a) < \frac{an + a^2}{(1-a)n + a}.$$

MofM 2013 ExtraList

Soluţie. Definim şirul $(a_k)_{k\geq 0}$ prin $a_0 = a$, $a_{k+1} = f_n(a_k)$ pentru $k \geq 0$. Motivarea pentru cele ce urmează vine din scrierea $\dfrac{a_{k+1} - a_k}{(k+1) - k} = \dfrac{a_k^2}{n}$. Dacă echivalăm $a_k = \phi(k)$, şi scriem relaţia $\dfrac{\phi(k+\varepsilon) - \phi(k)}{\varepsilon} = \dfrac{1}{n}\phi(k)^2$, adevărată pentru $\varepsilon = 1$, şi extrapolăm la orice $x = k$ şi $\varepsilon \neq 0$ reale, obţinem $\phi'(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\phi(x+\varepsilon) - \phi(x)}{\varepsilon} = K\phi(x)^2$, pentru o constantă K. Aceasta

[1]Cel ce înfăptuieşte răul urăşte lumina. Evanghelia după Ioan, citată de Lucie Simplice Camille Benoît Desmoulins (decapitat odată cu Danton).

[2]Lipsesc unele probleme, la care nu am văzut interesul de a fi prezentate. Le găsiţi pe toate, ca şi rezultatele, la `http://ssmr.ro/onm2014` şi `http://ssmr.ro/program_juniori`.

se scrie $\dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)^2} = K$, adică $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\dfrac{1}{\phi} = -K$, cu soluţia $\phi(x) = \dfrac{1}{C - Kx}$ (unică, până la constantele K, C); condiţiile

$$a_0 = a = \phi(0) = \frac{1}{C} \quad \text{şi} \quad a_1 = f_n(a) = a + \frac{a^2}{n} = \phi(1) = \frac{1}{C - K}$$

duc la $C = \dfrac{1}{a}$ şi $K = \dfrac{1}{a+n}$, deci $\phi(x) = \dfrac{a(a+n)}{n - a(x-1)}$. Luăm şirul $(x_k)_{k\geq 0}$ dat prin $x_k = \phi(k) = \dfrac{a(a+n)}{n - a(k-1)}$ pentru $0 \leq k \leq n+1$, deci

$$x_0 = a, x_1 = a + a^2/n = \frac{a(a+n)}{n}, \ldots, x_n = \frac{a(a+n)}{a + n(1-a)} = \frac{an + a^2}{(1-a)n + a}.$$

Avem, pentru orice $0 \leq k \leq n$, $x_{k+1} - f_n(x_k) > 0$ căci

$$\frac{a(a+n)}{n - ak} - \left(\frac{a(a+n)}{n - a(k-1)} + \frac{a^2(a+n)^2}{n(n - a(k-1))^2}\right) = \frac{ka^4(a+n)}{n(n-ak)(n-a(k-1))^2} > 0.$$

Dar $a_0 = x_0 = a$ şi $a_1 = x_1 = a + a^2/n$, şi atunci rezultă prin inducţie $x_{k+1} > f_n(x_k) \geq f_n(a_k) = a_{k+1}$ pentru $1 \leq k \leq n$, funcţia f_n fiind crescătoare. Prin urmare $a_n < x_n = \dfrac{an + a^2}{(1-a)n + a}$.[3] Desigur, aceasta nu demonstrează decât una dintre inegalităţi, dar am considerat că metoda merită fi prezentată. □

3. Test Selecţie IV către IMO

Subiectul (1)**.** *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Tangentele la cercul ABC în punctele B şi C se intersectează în punctul P. Cercul de centru P şi rază PB intersectează bisectoarea interioară a unghiului BAC în punctul Q, situat în interiorul triunghiului ABC, iar dreptele BC şi OQ se intersectează în punctul D. Fie E şi F proiecţiile ortogonale ale punctului Q pe dreptele AC, respectiv AB. Arătaţi că dreptele AD, BE şi CF sunt concurente.*

Remarcă. Ca de obicei, nu prea tratez problemele de geometrie (cu notabile excepţii!). Se pare însă că soluţia nu este chiar imediată, şi problema nu este chiar uşoară. **Comparaţi cu Problema 2.**

Subiectul (2)**.** *Fie p un număr prim impar. Determinaţi polinoamele f şi g din $\mathbb{Z}[X]$, care îndeplinesc condiţia*

$$f(g(X)) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k.$$

[3] Avem şi $a_{n+1} < x_{n+1} = \dfrac{an + a^2}{(1-a)n}$, dar x_{n+2} poate deveni negativ pentru a foarte aproape de 1.

Soluţie. Desigur $\Phi_p(X) = \dfrac{X^p - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$ este al p-lea polinom ciclotomic, având drept rădăcini ω rădăcinile primitive de ordin p ale unităţii, şi fiind ireductibil peste $\mathbb{Q}$ (din criteriul lui Eisenstein şi lema lui Gauss). Soluţii imediate sunt, pentru $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ şi constanta arbitrară $C \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{f(X) = \varepsilon X + C,\ g(X) = \varepsilon(\Phi_p(X) - C)}$$

$$\boxed{g(X) = \varepsilon X + C,\ f(X) = \Phi_p(\varepsilon(X - C))}$$

Să presupunem că există şi o altă soluţie, cu $1 < \deg f, \deg g < p - 1$ (şi produsul gradelor evident egal cu $p - 1$).[4] Fie atunci $1 < u = \deg f < p - 1$, cu $u \mid p - 1$, deci $1 < v = (p - 1)/u = \deg g < p - 1$. Pentru $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ cu $\omega^p = 1$ avem deci $f(g(\omega)) = 0$. Mulţimea $U = \{g(\omega) \mid \omega \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \omega^p = 1\}$ nu poate avea mai mult de u elemente, căci atunci f ar fi identic nul; pe de altă parte, dacă ar avea mai puţin de u elemente, atunci unul dintre ele ar fi obţinut pentru mai mult de $v = (p - 1)/u$ valori ale lui ω, şi atunci g ar fi constant, absurd. Prin urmare $|U| = u$, fiecare dintre elemente fiind obţinut pentru exact $v = (p - 1)/u$ dintre cele $p - 1$ valori ale lui ω.

Dar toate aceste consideraţii de mai sus sunt inutile (am decis să le prezint doar pentru a vedea o cale care se cam înfundă, dar care ar putea fi necesară dacă am analiza posibilitatea $f, g \in \mathbb{R}[X]$ ... Fie deci, pentru $1 < u, v < p-1$, $uv = p - 1$,

$$f(X) = a_u X^u + a_{u-1} X^{u-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

$$g(X) = b_v X^v + b_{v-1} X^{v-1} + \cdots + b_1 X + b_0.$$

Coeficientul lui X^{p-2} în $f(g(X))$ este evident $u a_u b_v^{u-1} b_{v-1}$, căci următoarele monoame sunt de grad cel mult $\max\{p - 3, p - v - 1\} \leq p - 3$. Dar $|u a_u b_v^{u-1} b_{v-1}| \neq 1$, căci $u \geq 2$, şi deci este diferit de coeficientul lui X^{p-2} în $\Phi_p(X)$, aşadar această opţiune nu este viabilă. $\square$

Remarcă. De ce $p = 2$ a fost exclus, este iarăşi un mister; cazul $p = 2$ nu este mai trivial decât $p = 3$. Mai mult, condiţia p prim este şi ea cu totul irelevantă, după cum se vede din pedestrul argument de mai sus. Nu susţin că se putea lucra în general cu polinomul ciclotomic $\Phi_n(X)$ (ar fi poate interesant de analizat acest caz, şi un rezultat particular cu soluţii suplimentare este chiar anunţat mai jos), dar evident se putea lucra cu

[4] Desigur, pentru unul dintre gradele polinoamelor f, g egal cu 1, **formele de mai sus sunt evidente**. Dacă $\deg f = 1$, atunci $f(X) = \varepsilon X + C$, şi $f(g(X)) = \Phi_p(X)$ se scrie $g(X) = f^{-1}(\Phi_p(X)) = \dfrac{1}{\varepsilon}(\Phi_p(X) - C)$. Dacă $\deg g = 1$, atunci $g(X) = \varepsilon X + C$, şi $f(g(X)) = \Phi_p(X)$ se scrie $f(X) = \Phi_p(g^{-1}(X)) = \Phi_p\left(\dfrac{1}{\varepsilon}(X - C)\right)$. Acestea forţează $|\varepsilon| = 1$, deci $\dfrac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$.

$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ pentru **orice** $n \geq 2$. Aşa încât condiţia de primalitate nu este decât praf în ochi – menit poate să ascundă banalitatea fenomenului cerut a fi demonstrat în această problemă care doar pare tehnică, şi poate speria concurenţii mai novici, dar care sucumbă la cel mai grosolan atac.[5] **Comparaţi cu Problema 1**.

De fapt, în demonstraţia de mai sus, **singurul** lucru care a contat a fost coeficientul monomului X^{n-2}, care (împreună cu faptul că $P_n(X)$ este monic) poate fi luat egal cu ± 1, pentru acelaşi rezultat (restul nu contează deloc). Am făcut şi câteva calcule pentru a ajunge la următoarele rezultate particulare

• Pentru $P_n(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \Phi_5(X)$ **nu** există altă soluţie nici măcar cu $f, g \in \mathbb{C}[X]$ (ar trebui $\deg f = \deg g = 2$, dar identificarea coeficienţilor ajunge la o contradicţie).

• Pentru $P_n(X) = X^4 + 1 = \Phi_8(X)$ există **şi** singura altă familie de soluţii

$$\boxed{f(X) = (X + C)^2 + 1, \ g(X) = \pm X^2 - C}$$

pentru o constantă arbitrară $C \in \mathbb{Z}$ (prin identificarea coeficienţilor).

Subiectul (3)**.** *Fie n natural nenul şi fie S_n mulţimea permutărilor mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pentru fiecare permutare σ din S_n, fie $I(\sigma) = \{i \ : \sigma(i) \leq i\}$. Calculaţi suma*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{|I(\sigma)|} \sum_{i \in I(\sigma)} (i + \sigma(i)).$$

Soluţie – Schiţă. (idee Ştefan Tudose) Notând $A_k = \{\sigma \ : \ |I(\sigma)| = k\}$, ar fi deajuns să demonstrăm

$$\sum_{\sigma \in A_k} \sum_{i \in I(\sigma)} (i + \sigma(i)) = (n+1)k|A_k|,$$

căci atunci suma cerută va fi $\sum_{k=1}^{n} (n+1)|A_k| = (n+1) \sum_{k=1}^{n} |A_k| = (n+1)!$. $\square$

[5] Am să prezint însă şi o metodă "avansată" de a soluţiona problema, produsă în concurs de Ştefan Spătaru, dar care păleşte, din păcate, în faţa şarjei de cavalerie de mai sus. Avem $\Phi_p(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1}$, deci $\Phi_p(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{(X+1) - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k+1} X^k$. Dar atunci $\Phi'_p(X+1) = \sum_{k=1}^{p-1} k \binom{p}{k+1} X^{k-1}$ satisface criteriul lui Eisenstein, deci este ireductibil peste $\mathbb{Q}$, aşadar $\Phi'_p(X)$ este şi el ireductibil peste $\mathbb{Q}$. Dacă avem $f(g(X)) = \Phi_p(X)$, atunci $f'(g(X))g'(X) = \Phi'_p(X)$, ceea ce forţează $\min\{\deg f, \deg g\} = 1$. Nu ştiu de ce, dar am presentimentul că aceasta era şi soluţia oficială intenţionată ... o cărămidă mult prea mare pentru a strivi o biată muscă (iar desigur, $\Phi'_8(X) = 4X^3$ este reductibil, şi acest caz particular, tratat mai sus, chiar invalidează concluzia pentru cazul general). Încă o substanţiere a zicalei "graba strică treaba".

Remarcă. O formulă elegantă, unde se poate ”ghici”, din considerarea cazurilor ”mici” $n = 1, 2, 3$, că valoarea căutată este $(n + 1)!$. Nu mai am însă puterea, nici răbdarea, de a căuta o soluţie personală.

4. Test Selecţie V către IMO

Subiectul (1)**.** *Fie ABC un triunghi şi fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Dreptele OA şi BC se intersectează în punctul M; punctele N şi P sunt definite în mod analog. Tangenta în A la cercul ABC intersectează dreapta NP în punctul X; punctele Y şi Z sunt definite în mod analog. Arătaţi că punctele X, Y, Z sunt coliniare.*

Remarcă. Vezi remarca despre problemele de geometrie de mai înainte. Vă trimit la soluţiile oficiale (când şi dacă vor fi vreodată postate).

Subiectul (2)**.** *Fie m un număr natural nenul şi fie A, respectiv B, un alfabet cu m, respectiv $2m$, litere. Fie n un număr par mai mare sau egal cu $2m$. Fie a_n numărul de cuvinte de lungime n, formate cu litere din A, în care apar toate literele din A, fiecare de un număr par de ori. Fie b_n numărul de cuvinte de lungime n, formate cu litere din B, în care apar toate literele din B, fiecare de un număr impar de ori. Determinaţi raportul b_n/a_n.*

Soluţie. Hmm ... funcţii generatoare? Răspunsul este $\boxed{b_n/a_n = 2^{n-m}}$. □

Remarcă. Reminiscenţe Problema 5, IMO 2008 Spania? Aş fi curios dacă cele două probleme sunt afine în vreun fel; rezultatele conţin formule foarte asemănătoare. Poate o minte mai tânără şi mai odihnită ...

Subiectul (3)**.** *Fie n un număr natural nenul şi fie $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare. Determinaţi*

$$\max_{0\le x_1\le\cdots\le x_n\le 1} \sum_{k=1}^{n} f\left(\left|x_k - \frac{2k-1}{2n}\right|\right).$$

Soluţie. Funcţia f nu joacă niciun rol, căci soluţia stabileşte existenţa unei permutări σ a mulţimii $\{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $\left|x_k - \frac{2k-1}{2n}\right| \le \frac{2\sigma(k)-1}{2n}$ pentru toţi $1 \le k \le n$, cu egalitate care chiar se poate atinge, pentru toţi $x_k = 0$ sau toţi $x_k = 1$. Prin urmare maximul căutat va fi $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$.

Fie graful bipartit unde malul stâng este $\{1, 2, \dots, n\} \times \{s\}$, malul drept este $\{1, 2, \dots, n\} \times \{d\}$, iar o muchie între (k, s) şi (ℓ, d) există dacă şi numai dacă $\left|x_k - \frac{2k-1}{2n}\right| \le \frac{2\ell-1}{2n}$. Dacă demonstrăm că există o permutare τ a mulţimii $\{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $\deg\,(k, s) \ge \tau(k)$ pentru orice $1 \le k \le n$, atunci condiţiile Hall din Lema Mariajelor sunt trivial îndeplinite, deci există un cuplaj perfect, adică o permutare σ a mulţimii $\{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $(k, s)(\sigma(k), d)$ să fie muchii pentru orice $1 \le k \le n$. □

5. Încheiere

Încă o problemă inutilă (Problema 2, Testul IV); dacă vom număra acum problemele relevante din cele (doar) cinci Teste de Selecţie, vedem că nu prea rămâne carne pe os, şi selecţia nu este prea serios sprijinită. Cu un astfel de număr scăzut de probleme efective, cine poate spune că (într-o lume fericită, în care chiar am avea o mai mare disponibilitate de talente) selecţia a fost cea mai potrivită? Oricum am ajuns să avem mai multe probleme în Testele de Selecţie pentru Juniori decât în cele pentru Seniori! Bine că măcar pregătirea a fost consistentă, susţinută şi eficientă, livrată în pachete hrănitoare pregătite de maeştri bucătari ...

Propun atunci, ca metodă alternativă de selecţie, cea a unui sondaj printre participanţi – pentru a alege echipa optimă; sigur nu ar produce un rezultat mai departe de adevăr, ar evita frustrările şi ar crea un consens (*in jest*) ☺

Anul acesta este aproape unic prin numărul ne-nul şi chiar ridicat de *drop-outs* din programul de selecţie. Nume ca Abu-Baker, Măgălie, Hai, Gramatovici, au părăsit programul, şi destui alţii sunt nemulţumiţi şi practic alienaţi de sistem. Atmosfera este încărcată, spiritele încinse, şi suferă – pe bună dreptate – matematica. Doar de deasupra norilor nu se vede, în ceaţă. Şi cum această majoritate tăcută nu este auzită, am încercat să-i dau o voce.

Enunţurile au fost postate în timp rezonabil de scurt (spre orele 17:00 luni şi marţi), dar nu şi soluţiile oficiale (probabil încă ne-finalizate la acest moment). Rezultatele au devenit şi ele disponibile în seara zilei de 3 iunie. Felicitări tuturor celor rămaşi în cursă până în aceste faze finale, şi celor calificaţi pentru concursurile internaţionale, unde le dorim un mare succes!

Echipa României pentru ediţia a XXI-a Tuymaada din Yakutsk – Yakutia este

Nume		**Şcoala**	**Puncte**
Theodor LUCESCU	IX	ICHB, Bucureşti	56
Ştefan Rareş TUDOSE	IX	ICHB, Bucureşti	53
Filip ION	IX	C.N. Mihai Viteazu, Bucureşti	45

À propos, Yacutia din anunţurile de pe SSMR este un hibrid; trebuia sau Yakutia în forma internaţională, sau, mai pe româneşte, Iacuţia sau Iacutia. Oare cum ne-am simţi dacă pe site-ul MAA ar fi scris Ruminia? În mod neaşteptat şi oarecum aleator, cu explicaţii la fel de neverosimile, selecţia pentru Tuymaada s-a făcut numai dintre elevii clasei a IX-a, tăind aripile unor elevi din clase mai mari, care sperau că în fine vor putea culege roadele muncii lor ... păcat! (mă întreb ce s-ar fi întâmplat dacă printre cei din lotul restrâns nu mai rămâneau deloc elevi de a IX-a?).

Echipa României pentru ediţia a 55-a OIM din Cape Town – Africa de Sud este

Radu GOLOGAN		Bucureşti		Leader
Bogdan ENESCU		Buzău		Deputy
Mihai BĂLUNĂ		Bucureşti		Observer A
Ömer CERRAHOĞLU		Baia Mare		Observer B
Nume		**Şcoala**	**Puncte**	
Ştefan SPĂTARU	XI	ICHB, Bucureşti	112	
Teodor Andrei ANDRONACHE	X	ICHB, Bucureşti	96	
Simona DIACONU	XI	ICHB, Bucureşti	95	
Viorel-Andrei BUD	XII	ICHB, Bucureşti	89	
Paul-Gabriel MUSCĂ	XII	ICHB, Bucureşti	85	
Ioan Laurenţiu PLOSCARU	X	C.N. A. Lahovari, Rm. Vâlcea	78	

Sincere regrete pentru **Marius Bocanu**, care nu şi-a găsit loc în echipa pentru OIM. Valurile au bătut din direcţia greşită în chila corabiei sale. *Ditto* pentru **Ömer Cerrahoğlu**, despre care am vorbit mai pe larg în comentariile mele legate de Olimpiada Naţională.