COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA NAŢIONALĂ – SIBIU, 8-10 APRILIE 2014

Abstract. Comments on some of the problems presented at the 2014 National Round of the Romanian Mathematics Olympiad.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII.
Data: 25 aprilie 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

Aquila non capit muscas.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Etapei Naţionale a Olimpiadei de Matematică 2014 reflectă opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[1] Materialul începe cu comentarii asupra primului Test de Selecţie către jBMO.

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Test Selecţie I pentru jBMO

Subiectul (1)**.** *Arătaţi că dacă numerele reale $x, y, z > 0$ verifică relaţia $xyz + xy + yz + zx = 4$, atunci $x + y + z \geq 3$.*

Lucian Petrescu

Soluţie. Expresiile din problemă ne roagă să considerăm expresiile simetrice elementare $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$, $w = xyz$. Atunci aplicând cunoscutele inegalităţi Maclaurin (care pentru trei variabile sunt extrem de uşor de obţinut şi în mod direct) avem $4 = v + w \leq \dfrac{u^2}{3} + \dfrac{u^3}{27}$, prin urmare $u^3 + 9u^2 - 108 \geq 0$, adică $(u - 3)(u + 6)^2 \geq 0$, de unde $\boxed{u \geq 3}$ (cu egalitate doar pentru $x = y = z = 1$). De ce oare $x, y, z > 0$ şi nu $x, y, z \geq 0$? □

Soluţie Alternativă. Ştiu prea bine că tehnica pe care o voi folosi în cele ce urmează depăşeşte nivelul competiţiei, dar de ce să nu practicăm o metodă care funcţionează automat în unele condiţii?

[1] Îmi cer scuze pentru întârziere, dar în perioada de imediat după încheierea ONM am fost ocupat cu EGMO 2014. Lipsesc unele probleme, la care nu am văzut interesul de a fi prezentate. Le găsiţi pe toate (postate în timp record – bravo!), ca şi rezultatele, la `http://ssmr.ro/onm2014` şi `http://www.isjsb.ro/onm/`.

Metoda multiplicatorilor Lagrange. Fie $R(x,y,z) = xyz + xy + yz + zx$ şi

$$L(x,y,z;\lambda) = x + y + z - \lambda(R(x,y,z) - 4),$$

definită pentru $x,y,z \geq 0$ şi un parametru real λ. Sistemul de derivate parţiale egalate cu zero este $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} &= 1 - \lambda(yz + y + z) &= 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} &= 1 - \lambda(zx + z + x) &= 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} &= 1 - \lambda(xy + x + y) &= 0 \end{cases}$ de unde se obţine imediat sistemul de ecuaţii $\begin{cases} (x-y)(z+1) &= 0 \\ (y-z)(x+1) &= 0 \\ (z-x)(y+1) &= 0 \end{cases}$ cu singura soluţie $x = y = z = t$ în interiorul domeniului de definiţie al lui L. Aceasta duce la $t^3 + 3t^2 = 4$, adică $(t-1)(t+2)^2 = 0$, deci $(x,y,z) = (1,1,1)$ ca singur punct critic, care se dovedeşte a fi punct de minim, cu $L(1,1,1) = 3$.

Deoarece $R(0,y,z) = 4$ duce la $yz = 4$, deci $L(0,y,z) = y+z \geq 2\sqrt{yz} = 4$, iar $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x,y,z) = +\infty$, rezultă că punctul de minim $(x,y,z) = (1,1,1)$ este global. $\square$

Subiectul (2)**.** *Determinaţi perechile* (a,b) *de numere întregi pentru care*

$$\frac{a+2}{b+1} + \frac{a+1}{b+2} = 1 + \frac{6}{a+b+1}.$$

Lucian Dragomir

Soluţie. Adunând $1 + 1 = 2$ în ambii membri, obţinem

$$(a+b+3)\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2}\right) = \frac{3(a+b+3)}{a+b+1}.$$

Atunci sau $a+b+3 = 0$, deci $\boxed{(a,b) = (-b-3,b),\text{ pentru } b \in \mathbb{Z} \setminus \{-2,-1\}}$, sau $(a+b+1)(2b+3) = 3(b+1)(b+2)$. Această ultimă relaţie se scrie $b^2 - 2(a-2)b - 3(a-1) = 0$, de unde $b = a - 2 \pm \sqrt{a^2 - a + 1}$. Trebuie atunci $a^2 - a + 1 = c^2$, deci $(2a-1)^2 + 3 = (2c)^2$, cu singura soluţie $|2a-1| = 1$. Rămân cazurile

• $a = 0$. Atunci $b \in \{-3,-1\}$, dar trebuie $b \neq -1$, iar pentru $b = -3$ avem $a + b + 3 = 0$, deci această soluţie este deja inclusă în familia găsită mai sus;

• $a = 1$. Atunci $b \in \{-2,0\}$, dar trebuie $b \neq -2$, şi deci obţinem singura soluţie suplimentară $\boxed{(a,b) = (1,0)}$. $\square$

Subiectul (3)**.** *Arătaţi că dintre şase puncte situate în interiorul unui pătrat de latură* 3, *se pot alege două astfel încât distanţa dintre ele să fie mai mică decât* 2.

***

Soluţie. Fie $1,268 \approx 3-\sqrt{3} < x < \sqrt{7}/2 \approx 1,323$, de exemplu $x = 13/10$. Partiţionăm acum pătratul de dimensiuni 3×3 în două dreptunghiuri de dimensiuni $x \times 3/2$ şi trei dreptunghiuri de dimensiuni $(3-x) \times 1$.

Din principiul cutiei, două dintre cele şase puncte se vor afla într-unul dintre aceste dreptunghiuri, dar prin calcul se obţine că diagonala fiecărui dreptunghi este mai scurtă decât 2. Pentru $x = 31/24$ obţinem chiar ambele diagonale egale cu $\approx 1,979 < 2$.[2] $\square$

Subiectul (4)**.** *Geometrie – vezi soluţia oficială.*

Leonard Giugiuc

Subiectul (5)**.** *Geometrie – vezi soluţia oficială.*

Marius Bocanu

3. Clasa a V-a

Subiectul (2)**.** *Spunem că unui număr natural n i se aplică o transformare* ***interesantă*** *dacă n se înmulţeşte cu 2, apoi rezultatul se măreşte cu 4; spunem că lui n i se aplică o transformare* ***deosebită*** *dacă n se înmulţeşte cu 3, apoi rezultatul se măreşte cu 9; în fine, spunem că lui n i se aplică o transformare* ***minunată*** *dacă n se înmulţeşte cu 4, apoi rezultatul se măreşte cu 16.*

a) Arătaţi că există un singur număr natural care, prin trei transformări succesive, una interesantă, una deosebită şi una minunată, aplicate în această ordine, devine 2020.

b) Determinaţi acele numere naturale care, după exact două transformări succesive diferite, dintre cele trei tipuri, devine 2014.

Soluţie. Transformările aplicabile lui n sunt $i(n) = 2n+4 = 2(n+2)$, $d(n) = 3n+9 = 3(n+3)$ şi $m(n) = 4n+16 = 4(n+4)$. Începem cu punctul b), observând că ultima transformare nu poate fi nici $d(\cdot)$ (2014 nu este multiplu de 3), nici $m(\cdot)$ (2014 nu este multiplu de 4). Prin urmare ultima transformare este $i(k) = 2014$, cu $k = \dfrac{2014-4}{2} = 1005$. Deoarece 1005 nu este par, prima transformare trebuie să fi fost $d(n) = 1005$, cu $n = \dfrac{1005-9}{3} = \boxed{332}$. După cum se vede, specificaţia diferite este inutilă.

Aceeaşi supra-calificare apare şi la punctul a), prin specificaţia aplicate în această ordine; după cum se va vedea, **acum** era suficient să se specifice diferite. Din moment ce 2020 nu este multiplu de 3, înseamnă că ultima transformare nu a putut fi $d(\cdot)$. Atunci

[2] Să observăm că cinci puncte nu sunt de ajuns (luând vârfurile şi centrul pătratului, distanţa minimă este $3/\sqrt{2} > 2$). Rezultatul cel mai strâns (din literatură) este că distanţa minimă (pentru şase puncte) nu depăşeste $\sqrt{13}/2 \approx 9/5 < 2$.

• ultima transformare a fost $m(\ell) = 2020$, cu $\ell = \dfrac{2020-16}{4} = 501$, care fiind impar forţează transformarea de mijloc să fi fost $d(k) = 501$, cu $k = \dfrac{501-9}{3} = 164$, şi atunci prima transformare a trebuit a fi $i(n) = 164$, cu $n = \dfrac{164-4}{2} = \boxed{80}$;[3]

• ultima transformare a fost $i(\ell) = 2020$, cu $\ell = \dfrac{2020-4}{2} = 1008$; atunci

• dacă transformarea de mijloc ar fi fost $d(k) = 1008$, ducând astfel la $k = \dfrac{1008-9}{3} = 333$, acesta fiind impar nu permite ca prima transformare să fi fost $m(\cdot)$;

• dacă transformarea de mijloc ar fi fost $m(k) = 1008$, ducând astfel la $k = \dfrac{1008-16}{4} = 248$, acesta nefiind multiplu de 3 nu permite ca prima transformare să fi fost $d(\cdot)$. □

Subiectul (3)**.** *Arătaţi că există un multiplu al numărului* 2013 *care se termină în* 2014*.*

Soluţie. Ideea este arhicunoscută. Pentru orice numere naturale nenule m şi n, cu m coprim cu 10, există un multiplu al lui m de forma $\overline{(n)(n)\ldots(n)}$. Aceasta este deoarece printre numerele $M_k = \underbrace{\overline{(n)(n)\ldots(n)}}_{\text{de } k \text{ ori}}$, $1 \leq k \leq m+1$, vor exista două, pentru indici $1 \leq p < q \leq m+1$, astfel încât M_p şi M_q să dea acelaşi rest la împărţirea cu m. Dar atunci $\boxed{M = \dfrac{1}{10^{p\ell(n)}}(M_q - M_p)}$, unde $\ell(n)$ este numărul cifrelor lui n, va fi un multiplu al lui m cu proprietatea cerută.

Sper că problema nu este semnată ... Acest tip de problemă este mai potrivit pentru o lecţie introductivă în combinatorică decât la un concurs de clasă (deşi există şi o metodă mai copilărească de rezolvare). □

Subiectul (4)**.** *O sută de cutii sunt numerotate de la* 1 *la* 100*. Fiecare cutie conţine cel mult* 10 *bile. Numerele bilelor (*valorile numerelor de bile*) din oricare două cutii numerotate cu numere consecutive diferă prin* 1*. Cutiile numerotate cu numerele* $1, 4, 7, 10, \ldots, 100$ *conţin, în total,* 301 *bile. Care este numărul maxim de bile din cele* 100 *de cutii?*

Soluţie. O combinaţie muncitorească de a calcula numărul maxim de bile din celelalte cutii (de 33 de ori $10 + 9 = 19$), şi de a rezolva sistemul de ecuaţii diofantice $x + y + z = 34$, $10x + 9y + 8z = 301$ (de exemplu $x = 6$, $y = 17$, $z = 11$), pentru a ajunge la un model cu număr maxim posibil de $33 \cdot 19 + 301 = \boxed{928}$. □

[3] Dacă nu era specificat faptul că cele trei transformări au fost diferite, am fi avut şi soluţia în care prima transformare ar fi putut fi $m(n) = 164$, cu $n = \dfrac{164-16}{4} = 37$.

Subiectul 4 a fost cel mai problematic, cu scoruri extrem de mici, de aşteptat ca răsplată pentru un efort atât de mare şi atât de steril.

4. Clasa a VI-a

Subiectul (1)**.** *Se consideră mulţimea A a numerelor de patru cifre, cel mult egale cu 2014. Determinaţi numărul maxim de elemente al unei submulţimi a lui A care conţine numai pătrate perfecte, oricare două prime între ele.*

Soluţie. Avem $31^2 < 1000 < 32^2 < 44^2 < 2014 < 45^2$, deci bazele pătratelor perfecte din A sunt

$$32 = 2^5, 33 = 3 \cdot 11, 34 = 2 \cdot 17, 35 = 5 \cdot 7, 36 = 2^2 \cdot 3^2, 37, 38 = 2 \cdot 19, 39 = 3 \cdot 13,$$

$$40 = 2^3 \cdot 5, 41, 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7, 43, 44 = 2^2 \cdot 11.$$

Soluţia oficială este relativ imprecisă, oferind un tip de "greedy algorithm" insuficient justificat. Adevărul este că pentru a obţine maximul posibil de $\boxed{\text{şase}}$ elemente **trebuie** să alegem $37, 41, 43$ şi 35, şi una dintre perechile $\{32, 33\}, \{32, 39\}, \{34, 33\}, \{34, 39\}, \{38, 33\}, \{38, 39\}, \{44, 33\}, \{44, 39\}$, deci câte un element fiecare din $\{32, 34, 38, 44\}, \{33, 39\}$, dar nu $\{44, 33\}$ ambele.

Nu văd absolut de loc meritul unei astfel de probleme, care poate fi chiar tratată în mod exhaustiv, fără idei matematice. Cu atât mai mult soluţia oficială ar fi trebuit să fie riguroasă la extrem. □

Subiectul (2)**.** *Un număr natural $n > 1$ se numeşte p-**periodic** dacă $\frac{1}{n}$ se poate scrie sub forma unei fracţii zecimale periodice simple, a cărei cea mai scurtă perioadă este formată din p cifre. Spre exemplu, numărul 9 este 1-periodic, deoarece $\frac{1}{9} = 0,(1)$, iar numărul 11 este 2-periodic, întrucât $\frac{1}{11} = 0,(09)$.*

a) Determinaţi numerele naturale p-periodice n care au proprietatea că prima cifră a perioadei numărului $\frac{1}{n}$ este nenulă.

b) Determinaţi cel mai mare număr prim care este 4-periodic.

Soluţie. Pentru un număr p-periodic avem $\frac{1}{n} = 0,(m) = \frac{m}{10^p - 1}$.

a) Dacă prima cifră a perioadei este nenulă, avem $10^{p-1} \leq m < 10^p - 1$, deci

$$1 = \frac{10^p - 1}{10^p - 1} < n \leq \frac{10^p - 1}{10^{p-1}} < 10,$$

care combinat cu $n \mid 10^p - 1$ forţează $\boxed{n \in \{3, 7, 9\}}$.

b) Avem atunci $nm = 10^4 - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$, deci cel mai mare prim este $\boxed{n = 101}$, pentru care într-adevăr avem $\frac{1}{101} = 0,(0099)$. □

Subiectul (3)**.** *Se consideră un număr natural n. Spunem că un triplet de numere naturale nenule, nu neapărat distincte (x, y, z) este* ***de tip*** *n dacă $x + y + z = n$, şi notăm cu $s(n)$ numărul tripletelor de tip n.*

a) Arătaţi că nu există niciun număr natural n pentru care $s(n) = 14$.
b) Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $s(n) > 2014$.

Soluţie. a) Avem $14 \equiv 2 \pmod 3$, dar $s(n) \not\equiv 2 \pmod 3$ pentru orice n. Aceasta este pentru că x, y, z distincte generează $3! = 6$ triplete, $x = y = z$ (dacă este posibil) generează 1 triplet, iar dacă exact două dintre x, y, z sunt egale, aceasta generează 3 triplete; aşadar $s(n) \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod 3$.

b) Soluţia oficială calculează printr-o metodă directă numărul $\boxed{65}$ de triplete ordonate care dă valoarea $s(n) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$; de aici se poate şi verifica imediat afirmaţia de la punctul a), anume că $s(n) \not\equiv 2 \pmod 3$.

Dar dacă în loc de 3 am avea k termeni în suma care îl dă pe n, metoda directă poate fi lungă şi periculoasă. Răspunsul general este dat de o celebră teoremă de combinatorică enumerativă[4]

> Date numerele naturale nenule n şi k, numărul compoziţiilor (distincte ale) lui n, formate din k numere naturale nenule, este $\dbinom{n-1}{k-1}$.

Terminologia este – o scriere $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ unde ordinea nu contează, se numeşte în literatură ***partiţie*** a lui n, iar o scriere unde ordinea contează, se numeşte în literatură ***compoziţie*** a lui n.

Prin urmare, pentru $k = 3$, trebuie găsit cel mai mic n pentru care să avem $s(n) = \dbinom{n-1}{2} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} > 2014$, adică $n^2 - 3n - 4026 > 0$, care impune $\boxed{n \geq 65}$. □

5. CLASA A VII-A

Subiectul (1)**.** *Determinaţi numerele prime p şi q, cu $p \leq q$, pentru care are loc egalitatea:*

$$p(2q + 1) + q(2p + 1) = 2(p^2 + q^2).$$

Soluţii Alternative. La aceiaşi bani, putem rezolva ecuaţia de mai sus în numere naturale nenule coprime (căci $p = q$ nu este o soluţie).

1) Scrind ecuaţia sub forma $4pq = p(2p-1) + q(2q-1)$, rezultă $p \mid 2q - 1$ şi $q \mid 2p - 1$, deci $pq \mid 2p + 2q - 1$. Dar atunci $pq \leq 2p + 2q - 1$, sau $(p-2)(q-2) \leq 3$. Din cele de mai sus se vede că trebuie ca p, q să fie impare, de unde, pentru $p \leq q$, trebuie $\boxed{(p, q) = (3, 5)}$ (care verifică), sau $p = 1$, care conduce însă la $q \mid 1$, deci $q = 1$, imposibil.

[4]Vezi `http://en.wikipedia.org/wiki/Stars_and_bars_(combinatorics)`.

2. Scriind ecuaţia sub forma $2p^2 - (4q+1)p + 2q^2 - q = 0$, discriminantul ei este $\Delta = (4q+1)^2 - 8(2q^2 - q) = 16q + 1$, şi trebuie a fi pătrat perfect, deci $16q + 1 = a^2$. Aceasta forţează $a = 8b \pm 1$, şi atunci $q = b(4b \pm 1)$. Dar atunci $p = \dfrac{4q + 1 \pm \sqrt{\Delta}}{4} = \dfrac{4b(4b \pm 1) + 1 \pm (8b \pm 1)}{4} = b(4b \pm 1) \mp 2b$, adică $p = b(4b \mp 1)$. Din condiţia $p \leq q$ rezultă $\boxed{(p, q) = (n(4n - 1), n(4n + 1))}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, şi acestea sunt toate soluţiile în numere naturale nenule. Din condiţia ca p, q să fie coprime rezultă $n = 1$, şi deci $\boxed{(p, q) = (3, 5)}$. □

Subiectul (3)**.** *Determinaţi toate numerele naturale n pentru care are loc egalitatea:*

$$17^n + 9^{n^2} = 23^n + 3^{n^2}.$$

Soluţie. Ecuaţia se scrie $(9^n)^n - (3^n)^n = 23^n - 17^n$. Pentru $n \geq 3$ avem $9^n > 23$ şi $3^n > 17$, dar şi $9^n - 3^n > 6$, deci $(9^n)^n - (3^n)^n > 23^n - 17^n$, căci

$$P = a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$Q = c^n - d^n = (c - d)(c^{n-1} + c^{n-2}d + \cdots + cd^{n-2} + d^{n-1})$$

şi atunci pentru $a > c > 0$, $b > d > 0$, $a - b > c - d > 0$, avem $P > Q$. Rămân cazurile $0 \leq n \leq 2$, dintre care doar $\boxed{n \in \{0, 1\}}$ verifică. □

Soluţie Alternativă. Cele de mai sus au fost scrise doar din dorinţa de a da o versiune mai rezonabilă la una dintre soluţiile oficiale. Cea mai simplă abordare este după cum urmează. Scriem ecuaţia ca

$$\left(\frac{17}{9^n}\right)^n + 1 = \left(\frac{23}{9^n}\right)^n + \left(\frac{1}{3^n}\right)^n.$$

Membrul stâng este întotdeauna supraunitar, în timp ce membrul drept este subunitar pentru $n \geq 2$. Rămâne doar $\boxed{n \in \{0, 1\}}$, care verifică. □

O problemă oribilă, din cauza existenţei unor aproximări grosolane – care o ucid fără efort. Cel puţin metoda din Soluţia Alternativă este clasică, tipică pentru ecuaţii diofantice exponenţiale.

6. CLASA A VIII-A

Subiectul (1)**.** *Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstraţi inegalitatea:*

$$\frac{a - \sqrt{bc}}{a + 2(b + c)} + \frac{b - \sqrt{ca}}{b + 2(c + a)} + \frac{c - \sqrt{ab}}{c + 2(a + b)} \geq 0.$$

Soluţie. Să notăm $A = \sum \dfrac{a}{a + 2(b + c)}$ şi $B = \sum \dfrac{\sqrt{bc}}{a + 2(b + c)}$. Atunci din (versiunea Titu a inegalităţii) Cauchy-Schwarz

$$A = \sum \frac{a}{a + 2(b + c)} = \sum \frac{a^2}{a^2 + 2(ab + ca)} \geq \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2 + 4 \sum bc} \geq \frac{3}{5},$$

căci revine la $2\sum a^2 \geq 2\sum bc$, adică $\sum (b-c)^2 \geq 0$. Dar din inegalitatea mediilor

$$B = \sum \frac{\sqrt{bc}}{a+2(b+c)} \leq \sum \frac{(b+c)/2}{a+2(b+c)} = \frac{1}{4}(3-A),$$

deci $B \leq \frac{1}{4}\left(3 - \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$, aşadar $A \geq \frac{3}{5} \geq B$, de unde $\boxed{A - B \geq 0}$. Egalitate se obţine evident (doar) pentru $a = b = c$. $\square$

Subiectul (3)**.** *Se consideră mulţimea $A = \{n, n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, unde $n \geq 4$ este un număr natural. Determinaţi cea mai mică valoare a lui n pentru care A conţine cinci elemente $a < b < c < d < e$ astfel încât*

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{e}.$$

Soluţie. Fie $\frac{p}{q}$ valoarea comună a fracţiilor de mai sus. Atunci există $x \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $n \leq a = xp^2 < xpq = c < e = xq^2 \leq 2n \leq 2xp^2 = 2a$, de unde $q \leq p\sqrt{2}$. Singurul rost al elementelor b şi d este de a forţa $(xp+2)p \leq xpq$ (ceea ce ne permite a lua $b = (xp+1)p$ şi $d = (xp+1)q$). Atunci $2 \leq x(q-p)$ şi prin urmare

- pentru $x = 1$ trebuie $q - p \geq 2$, care împreună cu $q \leq p\sqrt{2}$ duce la $p \geq \lceil (2/(\sqrt{2}-1) \rceil = 5$, deci $7^2 \leq (p+2)^2 \leq q^2 \leq 2n$, aşadar $n \geq 25$ (care se va vedea că este mai mare decât valoarea obţinută în cazul care urmează);
- pentru $x \geq 2$ trebuie $q - p \geq 1$, care împreună cu $q \leq p\sqrt{2}$ duce la $p \geq \lceil (1/(\sqrt{2}-1) \rceil = 3$, deci $2 \cdot 4^2 \leq x(p+1)^2 \leq xq^2 \leq 2n$, aşadar $n \geq 16$.

Deoarece pentru $\boxed{n = 16}$ rezultă rapid modelul (unic) $(x, p, q) = (2, 3, 4)$, $\boxed{(a, b, c, d, e) = (18, 21, 24, 28, 32)}$, acesta este răspunsul (din păcate, soluţia oficială conţine benigna eroare $e = 30$). $\square$

Subiectul (4)**.** *a) Demonstraţi că suprafaţa unui pătrat de latură 2 nu se poate acoperi cu trei discuri de rază 1.*

b) Demonstraţi că folosind trei discuri de rază 1 se poate acoperi mai mult de 99,75% din suprafaţa unui pătrat de latură 2.

Soluţie. Fie $ABCD$, cu coordonatele $A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$.

a) Două dintre cele patru vârfuri – fie ele A şi B – trebuie să aparţină unui aceluiaşi disc (deci să fie un diametru al său). Două puncte $X \in (A, D]$ şi $Y \in (B, C]$ pot aparţine unui aceluiaşi disc doar dacă $XY \parallel AB$, dar atunci ar trebui ca (AX) şi (BY) să fie ambele incluse în al treilea disc, imposibil. Iar dacă $(A, D]$ şi $(B, C]$ sunt incluse în câte un disc diferit fiecare (fiind diametre ale lor), mijlocul laturii CD va rămâne neacoperit. Soluţia oficială se complică nejustificat, conţinând şi regretabile erori de notaţie. Până aici, nimic grav – o cerinţă uşoară, deşi fără nicio legătură cu materia clasei a VIII-a, potrivită pentru orice clasă mică, în chip de curiozitate combinatorică.

b) Modelul prezentat în soluţia oficială apare în ipostaza *deus ex machina*, fără nicio justificare a felului cum a fost găsit, alta decât verificarea numerică. O întrebare aproape echivalentă (dar mai precisă şi interesantă) ar fi care este raza comună minimă r a trei discuri care pot acoperi pătratul? Acest fel de chestiuni fac obiectul unui important domeniu combinatoric, anume ”Acoperiri şi Împachetări” (”Coverings and Packings”), putându-se dovedi extrem de dificile, cu răspunsuri precise doar în unele cazuri ”mici”, uneori implicând explorări numerice cu ajutorul calculatorului.[5] Răspunsul, găsit în literatură, este $r = \sqrt{65}/8 \approx 1,0078$, de exemplu pentru un model unde centrele discurilor au coordonatele $(1/2, 7/8)$, $(3/2, 7/8)$ şi $(1, 15/8)$. Acesta sugerează verificarea numerică a unui model unde centrele a trei discuri de rază 1 au coordonatele $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $(3/2, \sqrt{3}/2)$ şi $(1, 2)$. Aria neacoperită de aceste discuri este mai mică decât cea a unui dreptunghi de laturi $2-\sqrt{3}$ şi $1-\sqrt{1-(2-\sqrt{3})^2}$, care este $\approx 0,0098 < 0,01$, deci mai puţin de $0,25\%$ din suprafaţa pătratului rămâne neacoperită. Aceasta a fost se pare şi metoda folosită în concurs de Tudor Plopeanu. În faţa unor probleme care necesită calcule mai complicate, nu văd raţiunea de a perpetua învechita interdicţie a unor instrumente mecanice sau electronice de calcul – căci nu efectuarea ”de mână” a unor operaţiuni plicticoase este scopul urmărit, şi nimeni în timpurile de azi nu se mai jenează în a le folosi.[6] Ce fericiţi ar fi fost Tycho Brahe, Kepler, Newton, Euler şi Gauss să fi avut la dispoziţie astfel de unelte! □

7. ÎNCHEIERE

Problemele de gimnaziu încep să mă intereseze mai mult (decât cele de liceu), fiind mai puţin supuse unor stricte cerinţe ”tehnice”, deci permiţând mai multă libertate şi originalitate (care din păcate nu sunt chiar în proporţia ideală; reţeta ”gustării” este cam fadă). Cu excepţia unor scăpări jenante, un concurs pedestru, deşi cam anost.

Faptul însă că numele autorilor problemelor lipsesc (lipsesc şi cele ale selecţionerilor problemelor, la fel de importanţi – poate chiar mai mult – în economia concursului), chiar şi în suplimentul G.M.-B. închinat Olimpiadei, este ciudat şi îngrijorător. De obiceiu se pun sub preş doar lucrurile urâte ... Secretomania este o boală, a cărei terminalitate este obsolenţa şi caducitatea, şi a cărei cură stă în bisturiul criticii.

[5]Un prim impuls de căutare şi cercetare personală pe Internet poate fi dat de studierea articolului de la `https://eudml.org/doc/141584`.

Referinţa `http://mathworld.wolfram.com/DiskCoveringProblem.html` trimite şi la fascinanta `http://mathworld.wolfram.com/FiveDisksProblem.html`, menţionată şi de Martin Gardner într-unul din Amuzamentele sale Matematice.

[6]Există, în România, un singur concurs unde interdicţia dispare; ghici ciupercă ...