INDUCŢIA MATEMATICĂ

ABSTRACT. Această a doua lecţie din ciclul pentru gimnaziu va încerca să prezinte adevărata forţă a metodei inducţiei matematice.

Lecţia 2 se adresează claselor VII, VIII, IX.
Data: 19 octombrie 2009.
Autor: Dan Schwarz, Comisia de Probleme ONM.

1. Introducere şi Notaţii

1.1. **Introducere.** Metoda inducţiei matematice, aşa cum este ea introdusă în manualele şcolare, poate lăsa falsa impresie că este limitată la verificarea unor formule date. De fapt, adevărata sa utilitate este în crearea pas cu pas a unor modele, şi în verificarea unor ipoteze uneori mult mai complexe decât o simplă formulă.

Dar pentru a începe, o definiţie cât mai generală a principiului inducţiei matematice.

Principiu. Fiind dată o afirmaţie $P(n)$ care depinde de valoarea unui număr întreg n, şi care

- este adevărată pentru $k \geq 1$ valori iniţiale consecutive $n_1, n_2, \ldots, n_k$,
- poate fi demonstrată pentru orice valoare $n > n_k$, bazându-ne pe adevărul afirmaţiei pentru toate valorile m mai mici $n_1 \leq m \leq n-1$,

atunci afirmaţia este adevărată pentru toate numerele $n \geq n_1$.

În cele mai multe cazuri se lucrează cu un singur ($k = 1$) caz iniţial n_1, de obicei 0 sau 1, şi se demonstrează implicaţia simplă $P(n) \implies P(n+1)$.

1.2. **Aplicaţii Simple.** O critică a exemplelor clasice din manuale.

Exemplul 1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ demonstraţi prin inducţie matematică formula

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Soluţie. Verificăm pentru $n = 1$ că $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Apoi, aplicând ipoteza de inducţie,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

adică valoarea căutată $\frac{n+1}{(n+1)+1}$.

Şi dacă formula nu este dată? Unii sugerează ghicirea, apoi verificarea prin inducţie (ceea ce în unele cazuri este inevitabil). Dar aici este cu mult preferabil să descoperim raţiunea mai adâncă a acestui rezultat. În acelaşi timp, vom învăţa o tehnică extrem de utilă pentru multe alte cazuri. Pornim de la evidenta egalitate $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Numele consacrat al acestei tehnici este scriere în fracţii simple, urmată de telescopare. □

Exemplul 2. Pentru $n \in \mathbb{N}$ demonstraţi prin inducţie matematică că

$$323 \mid 20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1.$$

Soluţie. Verificăm pentru $n = 0$ că $323 \mid 1 + 1 - 1 - 1 = 0$. Se vede că $323 = 17 \cdot 19$. Avem pentru $n \geq 1$

$$20^{2(n+1)} + 16^{2(n+1)} - 3^{2(n+1)} - 1 = 400 \cdot 20^{2n} + 256 \cdot 16^{2n} - 9 \cdot 3^{2n} - 1.$$

Dar $400 = 23 \cdot 17 + 9$ şi $256 = 15 \cdot 17 + 1$, deci rămâne a demonstra că

$$9 \cdot 20^{2n} + 16^{2n} - 9 \cdot 3^{2n} - 1 = 9(20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1) - 8(16^{2n} - 1)$$

se divide prin 17. Aplicând ipoteza de inducţie, rămâne a demonstra că $17 \mid 16^{2n} - 1 = 17 \cdot 16^{2n-1} - (16^{2n-1} + 1)$; finalmente $17 \mid 16^{2n-1} + 1$, căci în general $a + b \mid a^{2n-1} + b^{2n-1}$.

În mod cu totul similar se demonstrează divizibilitatea prin 19.

Personal, prefer de departe următoarea soluţie, bazată doar pe elementare calcule aritmetice. Avem, pe de o parte,

$$20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1 \equiv 3^{2n} + (-1)^{2n} - 3^{2n} - 1 = 0 \pmod{17},$$

şi pe de altă parte,

$$20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1 \equiv 1^{2n} + (-3)^{2n} - 3^{2n} - 1 = 0 \pmod{19}.$$

Esenţa problemei se dovedeşte a ţine de aritmetica modulară. □

2. Aplicaţii Sofisticate

2.1. **Paradoxul lui Pólya.** Această inegalitate, în diverse forme, apare în numeroase manuale şi culegeri de probleme.

Exemplul 3. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ demonstraţi inegalitatea

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

Soluţie. Verificăm pentru $n = 1$ că $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Apoi, aplicând ipoteza de inducţie, obţinem

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) \frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)},$$

expresie finală pe care am dori să o demonstrăm a fi $\leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}}$. Din păcate calcule simple conduc la $(2n+1)^2 \leq 4n(n+1)$, ceea ce este patent fals!

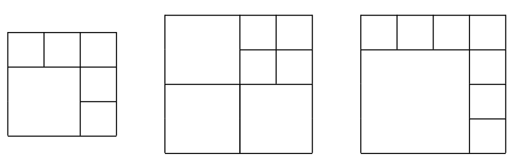
Suntem într-un impas. Faptul că inegalitatea nu poate fi prelungită nu înseamnă în niciun caz că afirmaţia este falsă, ci doar că metoda încercată de noi a eşuat. Dacă nu am mai văzut niciodată "trucul" care urmează, şansele noastre sunt extrem de reduse!

Ideea, ciudată, aparent împotriva bunului simţ, este de a demonstra o inegalitate mai puternică. Marele matematician George Pólya a numit acest fenomen "un paradox al inducţiei". Aşadar, vom încerca mai degrabă să demonstrăm inegalitatea faţă de termenul $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$. Verificăm pentru $n = 1$ că $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}}$. Apoi, aplicând ipoteza de inducţie, calcule asemănătoare cu cele de mai sus sunt acum (miraculos) încununate cu succes. □

2.2. **Alte Aplicaţii Interesante.** Există însă în unele manuale şi (puţine) exemple într-adevăr reuşite.

Exemplul 4. Demonstraţi că un pătrat poate fi partiţionat în n pătrate (de laturi nu neapărat distincte ca lungimi), pentru orice întreg pozitiv $n \geq 6$.

Soluţie. Mai întâi cazurile iniţiale, cu partiţionări în 6, 7 şi 8 pătrate.



Pentru pasul de inducţie, vom aplica metoda de a partiţiona un pătrat în alte patru pătrate, ilustrată de colţul dreapta-sus din modelul cu 7 pătrate (obţinut astfel dintr-un model cu 4 pătrate). Astfel, un model pentru orice $n > 8$ se poate obţine din modelul pentru $n - 3$, prin partiţionarea oricărui dintre pătratele componente în alte 4 pătrate, ca mai sus.

Se poate demonstra că un pătrat nu poate fi partiţionat în 5 pătrate. □

Exemplul 5. Determinaţi toate şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ formate din numere reale strict pozitive, pentru care avem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2$$

pentru orice valoare $n \geq 1$.

Laurenţiu Panaitopol

Soluţie. Măiestria acestui ultim exemplu constă şi în faptul că nu este imediat vizibilă afirmaţia care va fi demonstrată prin inducţie. Pentru $n = 1$, relaţia dată devine $a_1^3 = a_1^2$, deci $a_1 = 1$ (valoarea 0 nu este admisibilă, căci termenii şirului sunt strict pozitivi). Lansăm conjectura că afirmaţia $P(n)$ "$a_n = n$" este adevărată (sprijinită eventual şi de un calcul rapid care arată acum că pentru $n = 2$ rezultă $a_2 = 2$). Cum am verificat deja cazul iniţial $n = 1$, nu ne rămâne decât demonstrarea pasului de inducţie. Avem

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i^3 + a_{n+1}^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + a_{n+1}^3,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) a_{n+1} + a_{n+1}^2.$$

Pentru a avea egalitate, avem nevoie ca

$$a_{n+1}^3 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) a_{n+1} + a_{n+1}^2.$$

Dar, conform cu ipoteza de inducţie, avem

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i = 2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1),$$

deci condiţia de egalitate devine

$$a_{n+1}^3 = n(n+1)a_{n+1} + a_{n+1}^2, \text{ adică } a_{n+1}(a_{n+1} + n)(a_{n+1} - (n+1)) = 0.$$

Cum avem $a_{n+1} > 0$, singura posibilitate este $a_{n+1} = n + 1$, care confirmă pasul de inducţie. □

2.3. **O Problemă Specială.** O problemă care combină utilizarea ingenioasă a inducţiei cu întărirea ipotezei de inducţie (în spiritul paradoxului lui Pólya) este următoarea

Problema 1. Fie date numerele întregi $n \geq m \geq 1$, şi un tablou pătratic $n \times n$, conţinând $0 \leq N \leq m^2$ elemente egale cu 1. De câte ori o linie (respectiv coloană) conţine cel puţin m elemente egale cu 1, linia (respectiv coloana) poate fi completată cu valori 1. Atunci singurul caz când întregul tablou poate fi, pas cu pas, completat cu valori 1 este pentru $N = m^2$ (pentru anumite configuraţii speciale).

Încercaţi să găsiţi o soluţie înainte de a citi mai departe!

Pentru a putea rezolva rapid această problemă, este indicat să-i schimbăm enunţul în modul cel mai general cu putinţă (este unul dintre cazurile rare, dar extrem de plăcute estetic, când un enunţ mai general este mai uşor de abordat decât cazul particular, datorită unei manipulări ne-restricţionate, permisă tocmai de generalitatea acestui enunţ).