"OLIMPIADA" INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ "FORMULA OF UNITY" / "THE THIRD MILLENIUM" 2014/2015 – RUNDA A DOUA – ADDENDUM

ABSTRACT. Comments on some additional problems presented at the "new" integrated International Mathematical Olympiad "Formula of Unity" / "The Third Millenium", 2014/2015, second round.

Data: 25 februarie 2015.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

0. Introducere

Acestea sunt comentarii adiţionale asupra **Olimpiadei Internaţionale de Matematică "Formula of Unity" / "The Third Millenium"**, 2014/2015, **runda a doua**, şi reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Problemele date la o parte în materialul precedent.

Subiectul (3 – clasa a VI-a)**.** *Maria and Helen left their home at the same time and went to a store for an ice cream. Maria walked faster, so she reached the store in* 12 *minutes. She spent* 2 *minutes to buy an ice-cream and then left.* 2 *minutes later on her way back she met Helen. How long did it take for Helen to reach the store? Speeds of both girls are constant.*

Soluţie. Fie m viteza Mariei şi h viteza Helenei. Atunci $(12+2+2)h = (12-2)m$, deci $m = \dfrac{16}{10}h$, şi prin urmare $12m = \boxed{19.2}\,h$. □

Subiectul (3 – clasa a VII-a)**.** *There are* 3 *candies on a table and a bag with* 2012 *candies. Anna and Helen play the following game. In turns each girl takes candies from the bag and places them on the table. It is not allowed to add more candies than there are already on the table. The girl who takes the last candy from the bag is a winner. Anna starts first. Which of the girls can win the game no matter how the other girl plays?*

[1] Dintr-un exces de zel, voi prezenta şi restul problemelor din această rundă a doua. Soluţiile şi figurile unora din problemele de geometrie sunt curtoazie Laurenţiu Ploscaru. Problemele 3 – clasa a VII-a şi 6 – clasa a VIII-a sunt destul de interesante, căci mai neobişnuite (probleme cu jocuri, unde lipsa unei tehnici adecvate este nimicitoare) ... De remarcat că nici până astăzi, 25 februarie 2015, la peste două săptămâni după concurs, nici măcar enunţurile nu au apărut pe site, dară-mi-te soluţiile oficiale.

Soluţie. Suma numerelor bomboanelor de pe masă şi din pungă este constant egală cu $N = 2015 = 2n + 1$, număr impar. Fie $0 < m \leq N$ bomboane pe masă (la început $m = 3$), şi deci $p = N - m$ în pungă. Se vede uşor că dacă $1 \leq p \leq m$, atunci jucătorul la mutare câştigă, iar dacă $p = 0$ sau $p = m+1$, atunci jucătorul la mutare pierde.

Analiza retrogradă ne vine iarăşi în ajutor. Construim tabela $W - L$ a poziţiilor câştigătoare (W(inning)), respectiv pierzătoare (L(osing)), şi vom indica prin (p, m) perechea numerelor de bomboane din pungă, respectiv de pe masă (cu $p + m = N$), urmată, pentru o poziţie W, de $\xrightarrow{k}$, care indică mutarea a $1 \leq k \leq \max\{m, p\}$ bomboane din pungă pe masă, pentru a ajunge la o poziţie L.

W	L
	$(0, 2015)$
$(0 + k, 2015 - k) \xrightarrow{k}$ pentru $1 \leq k \leq 1007$	
	$(1008, 1007)$
$(1008 + k, 1007 - k) \xrightarrow{k}$ pentru $1 \leq k \leq 503$	
	$(1512, 503)$
$(1512 + k, 503 - k) \xrightarrow{k}$ pentru $1 \leq k \leq 251$	
	$(1764, 251)$
$(1764 + k, 251 - k) \xrightarrow{k}$ pentru $1 \leq k \leq 125$	
	$(1890, 125)$
$(1890 + k, 125 - k) \xrightarrow{k}$ pentru $1 \leq k \leq 62$	
	$(1953, 62)$
$(1953 + k, 62 - k) \xrightarrow{k}$ pentru $2 \leq k \leq 31$	
	$(1985, 30)$
$(1985 + k, 30 - k) \xrightarrow{k}$ pentru $2 \leq k \leq 15$	
	$(2001, 14)$
$(2001 + k, 14 - k) \xrightarrow{k}$ pentru $2 \leq k \leq 7$	
Aşadar $\mathbf{(2012, 3)} \xrightarrow{3}$	$(2009, 6)$

Prin urmare $\boxed{\text{Anna câştigă}}$. Încercarea efectuării analizei în sensul direct al desfăşurării jocului este sortită eşecului (din cauza numărului enorm de bifurcaţii). Analiza retrogradă este uneori de neînlocuit în atacarea unei probleme de joc (vezi şi problema următoare). $\square$

Subiectul (6 – clasa a VIII-a)**.** *A convex* 2015*-gon and all its diagonals are drawn on a blackboard. Alex and Ben play the following game. In turns each boy erases either any number from* 1 *to* 10 *of adjacent sides, or any number from* 1 *to* 9 *of diagonals (not necessarily from the same vertex). The player who cannot make a move loses. Alex starts first. Which of the boys can win the game no matter how the other boy plays? What is the winning strategy?*

Soluţie. Vom împărţi jocul în două sub-jocuri.

• Sub-jocul **1**. Doar mutările cu diagonale sunt luate în consideraţie. Vom considera numărul de diagonale disponibile, deci unde 0 este poziţie pierzătoare. Analiza retrogradă arată că deci $1-9$ sunt poziţii câştigătoare. Dar atunci 10 este poziţie pierzătoare, deci $11-19$ sunt poziţii câştigătoare, şi aşa mai departe. Prin urmare, poziţiile pierzătoare sunt multiplii de 10; cum numărul de diagonale este $\dfrac{2015(2015-3)}{2}$, deci un multiplu de 10, rezultă că primul jucător pierde, strategia câştigătoare a celui de-al doilea jucător fiind de a şterge $10-k$ diagonale dacă la mutarea precedentă primul jucător a şters $1 \leq k \leq 9$ diagonale.

• Sub-jocul **2**. Doar mutările cu laturi sunt luate în consideraţie. Al doilea jucător va aplica o strategie de simetrie; dacă la prima sa mutare, primul jucător a şters $1 \leq k \leq 10$ laturi adiacente, al doilea jucător şterge $11-k$ laturi adiacente – anume cele care lasă din conturul poligonului două linii frânte disjuncte, formate fiecare din $\dfrac{2015-k-(11-k)}{2} = 1002$ laturi. De acum înainte, jucătorul al doilea repetă în oglindă mutarea făcută imediat mai înainte de către primul jucător, în cealaltă linie frântă. Prin urmare, de câte ori primul jucător poate muta, şi al doilea va putea muta, deci primul jucător pierde.

Aşadar, primul jucător din fiecare sub-joc va pierde. Aceasta înseamnă că $\boxed{\text{Ben câştigă}}$ jocul complet; fiecare mutare a sa va fi în sub-jocul în care a mutat mai înainte Alex, după strategia câştigătoare a acelui sub-joc.

Deşi destul de străvezie, problema nu este rea deloc, îmbinând metode clasice din teoria rezolvării unor astfel de jocuri. □

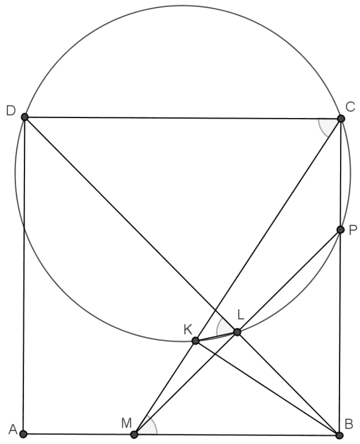
Subiectul (3 – clasa a VIII-a şi a IX-a). *Suppose ABC is an isosceles triangle. Let O be a the point of intersection of medians AA_1 and BB_1. Given that $\angle AOB = 120°$, find the angles of the triangle ABC.*

Soluţie. (D. Schwarz) Fie şi CC_1 a treia mediană. Enunţul nu spune în care vârf este triunghiul ABC isoscel. Distingem două cazuri.

• Isoscel în C. Atunci, din simetrie, $\angle AOC_1 = \angle BOC_1 = 60°$, deci $\angle OAC_1 = \angle OBC_1 = 30°$. Rezultă $OA = 2OC_1 = OB$. Dar avem şi $OC = 2OC_1$, deci triunghiurile AOC şi BOC sunt isoscele în O. Avem, din simetrie, şi $\angle AOC = \angle BOC = 120°$. Rezultă că triunghiul ABC este echilateral, deci unghiurile sale sunt toate trei egale cu $\boxed{60°}$.

• Isoscel în A (din simetrie, echivalent cu isoscel în B). Atunci, din simetrie, $\angle AOB = \angle AOC = 120°$, deci $\angle BOC = 120°$, şi atunci $\angle OBA_1 = \angle OCA_1 = 30°$. Rezultă $OB = 2OA_1 = OC$. Dar avem şi $OA = 2OA_1$, deci triunghiurile AOB şi AOC sunt isoscele în O. Rezultă că triunghiul ABC este si în acest caz echilateral. □

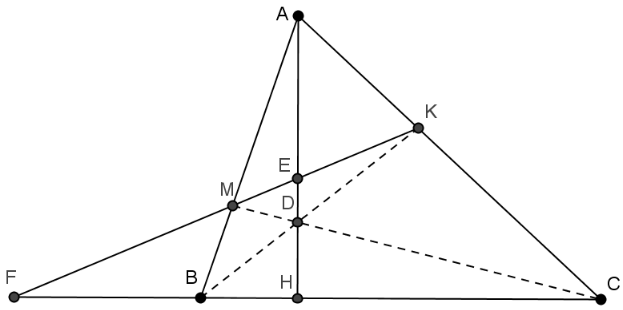
Subiectul (3 – clasa a X-a). *Points M and P are chosen on sides of AB and BC respectively of a square $ABCD$, so that $AM = CP$. A The circle with the of diameter DP intersects the segment CM at the point K. Prove that $MK \perp BK$.*



Soluţie. (L. Ploscaru) Fie $L = BD \cap MP$. Evident, punctele C şi K se află pe cercul de diametru $[DP]$. Mai mult, e clar că $PM \parallel AC$ şi $AC \perp BD$, prin urmare şi L se află pe acest semicerc. Patrulaterul $CDKL$ fiind înscris în cercul respectiv, unghiurile $\angle DCK$ şi $\angle DLK$ sunt congruente.

De asemenea, $\angle DCK \equiv \angle KMB$ ca unghiuri alterne interne, iar prin tranzitivitate obţinem $\angle DLK \equiv \angle KMB$, ceea ce înseamnă că patrulaterul $BMKL$ este inscriptibil. Dar atunci $\angle BKM = \angle BLM = 90°$, ceea ce trebuia demonstrat. □

Subiectul (3 – clasa a XI-a şi a XII-a). *Points H, K and M are marked respectively on the sides BC, AC and AB of a triangle ABC. Let AH be an altitude. Prove that HA is the angle bisector of $\angle KHM$ if and only if AH, BK and CM intersect at the same point are concurrent.*



Soluţie. (L. Ploscaru) Fie E şi F punctele în care dreapta KM intersectează dreptele AH, respectiv BC, iar $D = BK \cap CM$. Atunci dreapta AD este polara unghiulară a punctului F faţă de unghiul $\angle BAC$. Faptul că $D \in AE$ înseamnă că dreapta AE este polara unghiulară a lui F faţă de acelaşi unghi $\angle BAC$, ceea ce este echivalent cu faptul că diviziunea (E, F, M, K) este armonică, sau că fascicolul (HE, HF, HM, HK) este armonic. Or aceasta, în condiţiile în care $AH \perp BC$, este totuna cu faptul că HE şi HF sunt bisectoare (interioară, respectiv exterioară) ale unghiului $\angle KHM$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Subiectul (5 – clasa a XII-a). *Suppose $ABCD$ is a regular tetrahedron with edge of the length 1. Through an interior point of the face ABC three planes are drawn, parallel to the faces ABD, ACD and BCD respectively. These planes split the tetrahedron in several parts. Find the total sum of the lengths of the edges of the part that contains vertex D.*

Soluţie. (D. Schwarz) Fie P acel punct interior feţei ABC.

Fie B_AC_A paralela prin P la BC, cu $B_A \in AB$ şi $C_A \in AC$. Fie C_BA_B paralela prin P la CA, cu $C_B \in BC$ şi $A_B \in BA$. Fie A_CB_C paralela prin P la AB, cu $A_C \in CA$ şi $B_C \in CB$.

Planul prin P paralel la faţa ABD trece prin A_C şi B_C şi intersectează DC în punctul D_C, astfel ca $A_CD_C \parallel AD$ şi $B_CD_C \parallel BD$. Planul prin P paralel la faţa ACD trece prin C_B şi A_B şi intersectează DB în punctul D_B, astfel ca $C_BD_B \parallel CD$ şi $A_BD_B \parallel AD$. Planul prin P paralel la faţa BCD trece prin B_A şi C_A şi intersectează DA în punctul D_A, astfel ca $B_AD_A \parallel BD$ şi $C_AD_A \parallel CD$.

Fie $A' = B_CD_C \cap C_BD_B$, $B' = C_AD_A \cap A_CD_C$, $C' = A_BD_B \cap B_AD_A$. Partea care va conţine vârful D este paralelipipedul $DD_AB'D_CD_BC'PA'$. Suma lungimilor laturilor sale este

$$4(PA' + PB' + PC') = 2(A_CB_C + B_AC_A + C_BA_B) = \boxed{4},$$

din elementare proporţii de asemănări, deoarece triunghiurile $A_CB_CD_C$, $C_BA_BD_B$ şi $B_AC_AD_A$ sunt echilaterale, iar suma distanţelor punctului P la laturile $\triangle ABC$ este constant egală cu înălţimea lui $\triangle ABC$, indiferent de poziţia sa.

Partea care va conţine vârful D este paralelipipedul $DD_AB'D_CD_BC'PA'$ pentru orice tetraedru, fie el şi ne-echilateral. Suma lungimilor laturilor sale se poate atunci exprima în funcţie de laturile tetraedrului şi de distanţele de la punctul P la laturile $\triangle ABC$. □

2. ÎNCHEIERE

Cu acestea, toate problemele rundei a doua au fost atât soluţionate, cât şi comentate. Nu ştiu dacă (nu cred că) voi mai comenta acest concurs pe viitor – calitatea problemelor, şi dificultatea de a veni în contact cu enunţurile, şi mai ales soluţiile oficiale, toate mă fac să consider o atenţie prelungită ca fiind nejustificată. *Dasfidania, good bye, adieu.*