ViitoriOlimpici.ro

Problema 4
Etapa 2
Clasa a VI-a

**Problema 4.** Se consideră trei numere naturale $x, y$ și $z$ care verifică relația $x^2 + y^2 = z^2$. Arătați că $xy$ se divide cu 3.

* * *

**Soluţie:** Presupunem că $x$ și $y$ nu sunt divizibile cu 3.

Atunci $x, y \in \{3k+1, 3k+2\}$, unde $k$ este număr natural.

Folosind faptul că un pătrat perfect nu poate avea forma $3k+2$, cu $k$ număr natural, deducem că $x^2, y^2 \in \{3k+1\}$, unde $k$ este număr natural.

Dacă $x^2 = 3k_1 + 1$ și $y^2 = 3k_2 + 1$, atunci $z^2 = 3(k_1 + k_2) + 2$. Contradicție! Un pătrat perfect nu poate avea forma $3k+2$, cu $k$ număr natural.

Presupunerea făcută este falsă și atunci cel puțin unul dintre numerele $x$ sau $y$ se divide cu 3, de unde produsul $xy$ se divide cu 3.