COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015
FAZA LOCALĂ A MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

Abstract. Comments on some of the problems presented at the Local Round of the National Mathematics Olympiad 2015, Bucharest.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII.
Data: 16 februarie 2015.
Autor: Dan (*commendatore*) Schwarz, Bucureşti.

Don Giovaaaaaaanni ... [1]

0. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Locale a Olimpiadei de Matematică 2015 a municipiului Bucureşti, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului.

Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Clasa a V-a

Subiectul (2)**.** *Se dau mulţimile de numere naturale*

$$A = \{x-1, 2x-3, 3x+1, 4x-1\} \text{ şi}$$

$$B = \{4x-2, 3x+2, 3x-6, 2x-4\}.$$

Determinaţi valorile naturale ale lui x pentru care $A = B$.

G.M.-B. nr. 11/2014

Soluţie. Pentru a fi egale, cele două mulţimi trebuie să aibă aceeaşi sumă a elementelor lor, ceea ce forţează egalitatea $10x-4 = 12x-10$, adică $\boxed{x=3}$, şi **mai trebuie** doar verificat că atunci $A = \{2, 3, 10, 11\} = B$. După cum se vede, această soluţie nu are nevoie de nicio presupunere specială asupra lui x (şi acum x poate fi lăsat nespecificat, dar preclude alte aproşuri mai simpliste, legate de paritate, etc., precum în soluţia oficială). □

[1]The Commendatore Scene, Don Giovanni, Wolfgang (Wolfie) Amadeus Mozart, `https://www.youtube.com/watch?v=dK1_vmOFMAU`

[2]Lipsesc multe probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Nu pot oferi un link către enunţurile date şi soluţiile/baremele oficiale, căci nu au fost postate *nicăirea*.

Subiectul (3)**.** *În figura de mai jos, sunt n pătrate, în fiecare pătrat fiind scrise numai puteri ale lui* 2*, după cum se observă:*

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2^1 \\ \hline 2^2 & 2^3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2^4 & 2^5 \\ \hline 2^6 & 2^7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2^8 & 2^9 \\ \hline 2^{10} & 2^{11} \\ \hline \end{array} \quad \ldots$$

a) Arătaţi că suma numerelor din oricare dintre cele n pătrate este multiplu de 5*.*
b) Demonstraţi că produsul numerelor din oricare dintre cele n pătrate este pătrat perfect.
c) Aflaţi restul împărţirii la 1024 *a sumei tuturor numerelor aflate în primele* 2015 *pătrate.*

ION CICU, CRISTIAN OLTEANU & TRAIAN PREDA

Soluţie. Al k-lea pătrat este $\begin{array}{|c|c|}\hline 2^{4k-4} & 2^{4k-3} \\ \hline 2^{4k-2} & 2^{4k-1} \\ \hline \end{array}$ pentru $1 \leq k \leq n$.

a) $2^{4k-4} + 2^{4k-3} + 2^{4k-2} + 2^{4k-1} = 2^{4k-4}(1+2+4+8) = 3 \cdot 5 \cdot 2^{4k-4}$.

b) $2^{4k-4} \cdot 2^{4k-3} \cdot 2^{4k-2} \cdot 2^{4k-1} = 2^{16k-10} = \left(2^{8k-5}\right)^2$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(2^{4k-4} + 2^{4k-3} + 2^{4k-2} + 2^{4k-1}\right) = \sum_{k=0}^{4n-1} 2^k = 2^{4n} - 1$. Prin urmare, pentru orice $n \geq 3$, restul împărţirii la $1024 = 2^{10}$ este $1024 - 1 = \boxed{1023}$. Se vede uşor că se poate evita acest calcul general, prin simpla observaţie că puterile de la 2^{10} încolo se divid prin 1024, deci este suficient să adunăm $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 2^{10} - 1 = 1023$.

Ce caută acolo numărul n din enunţ? din moment ce oricum se cere la punctul c) suma numerelor din doar primele 2015 pătrate. Trebuia măcar specificat $n \geq 2015$, dar mai simplu era să se dea direct $n = 2015$, sau pur şi simplu să se enunţe punctul c) pentru un $n \geq 3$ arbitrar ...

Se dovedeşte din soluţia oficială că de fapt $n \geq 0$ era intenţionat doar ca un indice **generic**; iar calculele făcute nici măcar nu folosesc faptul că în fiecare pătrat exponentul celei mai mici puteri a lui 2 este multiplu de 4. $\square$

Subiectul (4)**.** *Trei fraţi vor să-şi cumpere împreună, din economiile lor, o tabletă în valoare de* 2015 *lei. Fratele cel mai mare contribuie cu o sumă de trei ori mai mare decât jumătatea sumei cu care contribuie cel mai mic dintre fraţi fratele cel mic, iar fratele mijlociu contribuie cu o sumă cuprinsă între sumele celorlalţi doi fraţi. Fiecare dintre sumele cu care contribuie cei trei fraţi sunt exprimate prin numere naturale este exprimată printr-un număr natural de lei.*

a) Aflaţi cea mai mică sumă de lei cu care contribuie poate contribui fratele mijlociu.
b) Aflaţi numărul total al soluţiilor problemei, şi cea mai mare sumă cu care contribuie poate contribui fratele mijlociu.

VICTOR NICOLAE & SIMION PETRE

Soluţie. Fie m suma contribuită de fratele cel mic; atunci suma contribuită de fratele cel mare este $3m/2$, ceea ce forţează $m = 2n$ număr par. Dacă notăm cu x suma contribuită de fratele mijlociu, ajungem deci la restricţiile $2n \leq x \leq 3n$ şi $5n + x = 2015$, prin urmare $x = 5y$ trebuie să fie divizibil prin 5, şi $n + y = 403$. Dar atunci $5y = x \geq 2n = 2 \cdot 403 - 2y$, care duce la $y \geq 116$, dar şi $5y = x \leq 3n = 3 \cdot 403 - 3y$, care duce la $y \leq 151$. Să observăm şi că oricare dintre valorile $116 \leq y \leq 151$ duce într-adevăr la o soluţie; luând $n = 403 - y$ vom avea

$$x - 2n = 5y - 2(403 - y) = 7y - 806 \geq 7 \cdot 116 - 806 > 0,$$

$$3n - x = 3(403 - y) - 5y = 1209 - 8y \geq 1209 - 8 \cdot 151 > 0,$$

$$5n + x = 5n + 5y = 5(n + y) = 5 \cdot 403 = 2015.$$

Am obţinut simultan răspunsul la toate întrebările; valoarea cea mai mică posibilă a contribuţiei fratelui mijlociu este $5 \cdot 116 = \boxed{580}$, valoarea cea mai mare posibilă a contribuţiei fratelui mijlociu este $5 \cdot 151 = \boxed{755}$, iar numărul total de posibilităţi este $(151 - 116) + 1 = \boxed{36}$.

Precizarea din economiile lor este nespus de dulce ... [3] Superlativele absolute legate de vârstele fraţilor sună forţat. Acordul pentru "fiecare ..." se face la singular. Sumele minimă şi maximă (posibil) contribuite de fratele mijlociu sunt potenţiale. □

2. CLASA A VI-A

Subiectul (1). *Determinaţi numerele naturale a, b, $a < b$ şi $c \in \mathbb{N}$ astfel încât* $\dfrac{a^2 + a}{2} + \dfrac{b^2 + b}{2} = \dfrac{c + 3}{c + 1}$.

G.M.-B. nr. 1/2014

Soluţie. Deoarece $a^2 + a = a(a + 1)$ şi $b^2 + b = b(b + 1)$ sunt numere pare, rezultă că $\dfrac{c + 3}{c + 1}$ trebuie să fie număr natural, deci $c+1 \mid (c+3)-(c+1) = 2$, de unde $c \in \{0, 1\}$.

- Pentru $c = 0$ ajungem la $\{a, b\} = \{0, 2\}$, deci $\boxed{a = 0,\ b = 2}$;
- Pentru $c = 1$ ajungem la $a = b = 1$, care nu funcţionează, din cauza cerinţei $a < b$ (puţin abuzivă, căci ne privează de încă o soluţie). □

[3] Îmi aduce aminte de o remarcă a lui J. L. Borges, legată de precizia inutilă şi preţioasă a unor exprimări.

Subiectul (2)**.** *Se consideră următoarele numere naturale:*

$$a = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 27 \cdot 29 \cdot 31 \text{ şi } b = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 27 \cdot 29.$$

a) Demonstraţi că numărul a este divizibil cu 2015*.*
b) Aflaţi cel mai mare număr natural n cu proprietatea că numărul $a + b$ este divizibil cu 10^n.
c) Să se afle Aflaţi câţi divizori care sunt pătrate perfecte are numărul a.

TRAIAN PREDA

Soluţie. Avem $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$.

a) Toţi cei trei factori primi ai lui 2015 se numără printre factorii lui a.

b) $a+b = 32b = 2^5 \cdot 5^4 \cdot c$, unde c este coprim cu 10; rezultă că $\boxed{\max n = 4}$.

c) Avem şi $c = 3^8 \cdot 7^2 \cdot d$, unde d este coprim cu 21 şi liber de pătrate, deci $a = 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot e$, unde e este coprim cu 105 şi liber de pătrate. Prin urmare există $\boxed{30}$ de divizori pătrate perfecte.

A declara în enunţ că numerele a şi b, date prin valorile lor **exacte**, sunt naturale, este complet redundant; de altfel chiar forma în care sunt date este caraghioasă – mai natural era să se dea b, şi apoi $a = 31b$, dar poate s-a considerat că aceasta va ajuta concurenţii să factorizeze $a + b$?!? □

Subiectul (3)**.** *Se consideră mulţimea $A = \left\{\overline{ab} \mid \overline{ab} \text{ divizibil cu } 5\right\}$. Pentru o submulţime $B \subseteq A$ notăm cu m_B media aritmetică a elementelor sale. Să se determine Determinaţi submulţimile B de cardinal maxim, ştiind că $m_B \in A$.*

TRAIAN PREDA

Soluţie. Considerând mulţimea $A' = \{2, 3, \ldots, 19\}$,[4] problema revine la a găsi mulţimile $B' \subseteq A'$ de cardinal maxim, astfel încât media aritmetică a elementelor lor să fie număr natural. Deoarece $B' = A'$ nu funcţionează, căci $\dfrac{2+3+\cdots+19}{18} = \dfrac{189}{18}$, vom căuta mulţimi B' cu doar 17 elemente, deci $B' = A' \setminus \{k\}$, pentru un $2 \le k \le 19$. Atunci $m_{B'} = \dfrac{189-k}{17}$ trebuie să fie număr natural, deci $17 \mid k - 2$, ceea ce este posibil, dacă şi numai dacă $k \in \{2, 19\}$. Rezultă $\boxed{B = A \setminus \{10\} \text{ şi } B = A \setminus \{95\}}$. □

3. CLASA A VII-A

Subiectul (1)**.** *Determinaţi numerele rattionale x şi y care verifică*

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{(|2x+y| - 5) \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2}}{|3y-3| \cdot \sqrt{5} + \sqrt{3}}.$$

***

[4]Autorii subînţeleg că $a \neq 0$. Dacă nu, cu $A' = \{0, 1, \ldots, 19\}$, răspunsul ar fi fost $\boxed{B = A \setminus \{0\} \text{ şi } B = A \setminus \{95\}}$.

Soluţie. Înmulţind "mezii şi extremii", $|3y-3|\sqrt{2} = (|2x+y|-5)\sqrt{3}$. Din considerente de raţionalitate rezultă $|3y-3| = 0 = |2x+y|-5$, de unde $\boxed{(x,y) \in \{(-3,1),(2,1)\}}$.

Cel puţin aici raţionalitatea numerelor este chiar relevantă; vezi problema următoare. Ce să mai creadă copiii, la această fază încă "de mase", când condiţii din enunţ uneori sunt relevante, alteori nu? □

Subiectul (2)**.** *Fie $x \neq -1$, $y \neq -2$, $z \neq -3$ numere raţionale astfel încât*

$$\frac{2015}{x+1} + \frac{2015}{y+2} + \frac{2015}{z+3} = 2014.$$

Calculaţi $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{y}{y+2} + \dfrac{z+1}{z+3}$.

G.M.-B. nr. 10/2014

Soluţie. Desigur $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{y}{y+2} + \dfrac{z+1}{z+3} = 3 - 2\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+2} + \dfrac{1}{z+3}\right)$, iar paranteza este egală cu $\dfrac{2014}{2015}$, deci valoarea căutată este $\boxed{\dfrac{2017}{2015}}$.

Ce importanţă are declararea numerelor x, y, z ca fiind raţionale? Of, of, of ... luăm direct din gazetă enunţuri, fără un minim control de calitate. □

4. Clasa a VIII-a

Subiectul (1)**.**
a) Arătaţi că $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ pentru orice număr x real, $x \geq 0$;
b) Determinaţi numerele reale şi pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_{2014}, x_{2015}$ care verifică egalitatea

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2015}^3 = 3(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2015}) - 4030.$$

Mihaela Berindeanu

Soluţie.
a) $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \geq 0$, chiar şi pentru $x > -2$, cu egalitate doar pentru $x = 1$.
b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2015} x_k^3 - 3\sum_{k=1}^{2015} x_k + 4030 = \sum_{k=1}^{2015}(x_k^3 - 3x_k + 2) \geq 0$, după punctul a), cu egalitate doar pentru toţi $\boxed{x_k = 1,\ 1 \leq k \leq 2015}$. Restricţia la numere reale **pozitive** este delicată ... Mai mură-n gură nici că se poate. □

Subiectul (2)**.** *Determinaţi numerele prime $p > q$, ştiind că*

$$p(1+3pq) + q(1-3pq) = p^3 - q^3.$$

G.M.-B. nr. 12/2014

Soluţie. (Oficială) Relaţia din enunţ se mai poate scrie şi $p + q = (p - q)^3$.

De aici deducem că $p - q \mid p + q$, şi cum $p - q \mid p - q$, rezultă că $p - q \mid 2p$. Deoarece p este număr prim, putem avea 1. $p - q = 1$; 2. $p - q = 2$; 3. $p - q = p$; 4. $p - q = 2p$.

Cazurile 3 şi 4 sunt imposibile. Din cazul 1 obţinem $p = q + 1$. Înlocuind în relaţia $p + q = (p - q)^3$ obţinem $2q + 1 = 1$, adică $q = 0$, absurd.

Din cazul 2 obţinem $p = q + 2$. Înlocuind în relaţia $p + q = (p - q)^3$ obţinem $2q + 2 = 8$, adică $q = 3$, şi de aici $p = 5$.

După cum se vede, a contat **doar** faptul că p este prim. La fel se putea proceda dacă se ştia **doar** că q este prim. Atunci se obţine $p - q \mid 2q$, deci putem avea 1. $p - q = 1$; 2. $p - q = 2$; 3. $p - q = q$; 4. $p - q = 2q$. Cazurile 3 şi 4 sunt imposibile, iar cazurile 1 şi 2 sunt exact ca mai sus. Iar condiţia $p > q$ este inutilă, căci rezultă din relaţia dată.

Nu-mi plac problemele cu enunţuri supra-calificate (redundante). S-ar fi putut da o **"prelucrare"**, unde să se spună doar că p, q sunt naturale, şi că se ştie că măcar unul dintre ele este prim. Cu atât mai mult cu cât cazul general poate fi soluţionat cu uşurinţă, după cum urmează. □

Soluţie Generală. Considerăm dat doar faptul că p, q sunt numere naturale nenule (nimic despre primalitatea lor). Fie $d = \text{c.m.m.d.c.}(p, q)$, $p = da$, $q = db$, pentru nişte numere naturale a, b cu $\text{c.m.m.d.c.}(a, b) = 1$. Relaţia $p + q = (p - q)^3$ se scrie $a + b = d^2(a - b)^3$, de unde $a > b$ şi $a - b \mid a + b$. Deoarece $a - b \mid a - b$, şi $\text{c.m.m.d.c.}(a + b, a - b) \mid 2$, avem cazurile

• $\text{c.m.m.d.c.}(a + b, a - b) = 1$. Atunci $a = b + 1$ şi deci $2b + 1 = d^2$, ceea ce forţează d impar, deci $d = 2k + 1$ pentru un $k \in \mathbb{N}$, şi $b = 2k^2 + 2k$. Aceasta duce la soluţiile $(p, q) = ((2k+1)(2k^2+2k+1), (2k+1)(2k^2+2k))$.

• $\text{c.m.m.d.c.}(a + b, a - b) = 2$. Atunci $a = b + 2$ şi deci $2b + 2 = 8d^2$. Aceasta duce la soluţiile $(p, q) = (d(4d^2 + 1), d(4d^2 - 1))$, cu $d \in \mathbb{N}^*$ arbitrar.

Dacă vrem acum să identificăm soluţiile unde măcar unul dintre p, q este număr prim, primul paragraf nu oferă soluţii, iar al doilea merge doar pentru $d = 1$, când se obţine $(p, q) = (5, 3)$. □

Subiectul (3)**.** *În cubul $ABCDA'B'C'D'$ fie R, S, T mijloacele muchiilor $[AB]$, $[B'C']$, sşi respectiv $[DD']$. Dacă M, P, Q sunt mijloacele segmentelor $[C'R]$, $[AS]$, şi respectiv $[BT]$, atunci:*

a) Arătaţi că dreapta MQ este paralelă cu planul (DCC');

b) Determinaţi aria triunghiului MPQ, dacă $AB = 4$cm.

***

Soluţie. Problema este prezentată doar din cauza omiterii diacriticelor. □

Urmează singura problemă din această colecţie, pestriţă dar sărăcuţă, care implică ceva gândire. Este o problemă combinatorică; din păcate suferind din cauza eforturilor de a o prezenta în cadrul unei construcţii de geometrie în spaţiu.

Subiectul (4)**.** *Fie $VABCD$ şi $SABCD$ două piramide patrulatere având aceeaşi bază $ABCD$ şi cu vârfurile de o parte şi alta a planului (ABC). Pe cele 12 muchii şi 6 vârfuri ale corpului obţinut se înscriu numerele naturale de la 1 la 18, câte unul în mijlocul fiecărei muchii şi al fiecărui în fiecare vârf. Este posibil ca pe fiecare muchie a corpului nou obţinut, numărul înscris în mijlocul muchiei să fie media aritmetică a numerelor înscrise în extremităţile muchiei respective?*

DANA RADU

Soluţie. Numerele 1 şi 18, fiind extremale, trebuie înscrise în vârfuri. Două vârfuri adiacente ar trebui să aibă înscrise numere de aceeaşi paritate, dacă răspunsul ar fi afirmativ. Dar există un lanţ de muchii care conectează cele două vârfuri de mai sus; contradicţie, deci răspunsul este $\boxed{\text{NU}}$.

Faptul că cele două piramide au aceeaşi bază rezultă din notaţii; chiar şi patrulatere este redundant (iar faptul că se chiar obţine un corp solid este irelevant, căci problema este combinatorică, de pură incidenţă). Corpul obţinut devine nou ceva mai târziu, iar a înscrie un număr în mijlocul unui vârf este o realizare demnă de Swester Katrei (care se întreba câţi îngeri încap pe vârful unui ac?)[5] □

5. ÎNCHEIERE

Ca şi într-un alt an (trecut), etapa locală a Municipiului Bucureşti a Olimpiadei Naţionale de Matematică s-a desfăşurat într-o zi de duminică, 15 februarie 2015; regina ştiinţelor nu şi-a asigurat din timp ziua de sâmbătă – reclamată de Olimpiada de Fizică – şi a trebuit să se mulţumească cu un timp de mâna a doua (o şiră a spinării demnă de o nevertebrată meduză ...).

În anii trecuţi, SSMR avea bunul obicei să posteze o hartă a României, cu link-uri pentru fiecare judeţ către problemele şi soluţiile lor oficiale ale Fazei Locale de acolo. Văd că s-a renunţat (cel puţin la momentul scrierii acestor comentarii) la această idee – păcat!

Foile de concurs şi soluţiile oficiale sunt scrise într-un hibrid de LaTeX, mult mai bun decât mai vechile materiale în WORD, dar care încă, uneori, produce efecte estetice neplăcute. Vom ajunge, poate, odată, la o versiune ireproşabilă. Cel puţin problemele au autori, şi nu par create *ad-hoc*.

Problemele de gimnaziu mă interesează mai mult (decât cele de liceu) în această fază a competiţiei, fiind mai puţin supuse unor stricte cerinţe "tehnice", deci permiţând mai multă libertate şi originalitate (care din păcate nu sunt chiar în proporţia ideală; reţeta "gustării" este cam fadă). Cele mai multe din probleme au rămas destul de neatractive, iar "scăpările" din soluţiile oficiale sunt descurajante. Cu toate acestea, faţă de ceea ce s-a comis la liceu, nicio comparaţie!

[5] *Tusent selen siczen in dem himelrich uff einer nadel spicz*; o mie pot fi căţăraţi pe vârful unui ac, crede Sora Katerina.