ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

ABSTRACT. Această lecţie din ciclul pentru gimnaziu îşi propune să introducă anumite idei şi să demistifice unele concepte combinatorice.

Lecţia se adresează claselor VII, VIII, IX.
Data: 4 octombrie 2010.
Autor: Dan Schwarz.

1. Introducere

Ceea ce se înţelege de obicei prin combinatorică în manualele şcolare este mai corect (şi uneori chiar astfel) denumit prin sărăcăciosul titlu metode de numărare. Combinatorica este însă cu mult mai diversă în interesele şi metodele sale, ajungând să infiltreze, în timpuri recente, mai toate domeniile matematicii, indiferent cât de specializate sau ”serioase”.

Titlul Ars Combinatoria, legat de catalanul Ramon Llull (Raymond Lully) cât şi de marele Gottfried Leibniz, este cel care probabil a dat numele acestei discipline şi acestor metode, dar cel care a propulsat-o pe primul plan al firmamentului matematic a fost fără îndoială inegalabilul Pál Erdös.

În viziunea mea, combinatorica este la fel de mult un fel de a gândi şi aborda matematica de orice fel, ca şi summa tehnicilor sale catalogate.

2. Metode

2.1. **Principiul Cutiei.** Metoda cea mai celebră prin eficacitate, simplitate, aplicabilitate, şi nu în ultimul rând prin numele său (!), este aşa-numitul principiu al cutiei (pigeonhole principle în engleză), sau Principiul lui Dirichlet (care nu l-a inventat, nici descoperit, ci folosit şi evidenţiat ca atare într-una din lucrările sale de teoria numerelor). În enunţul său informal, el afirmă că dacă plasăm un număr de obiecte într-un număr strict mai mic de cutii, măcar una dintre cutii va conţine cel puţin două dintre obiecte. Eu zic că nici măcar nu are nevoie de demonstraţie, dar dacă vreţi una, fie n obiecte şi c cutii, cu $n > c$; dacă în final fiecare cutie ar conţine cel mult un obiect, atunci împreună ele ar conţine cel mult c obiecte, strict mai puţin decât cele n obiecte plasate în cutii.

Există mai multe variante ale acestui principiu, de exemplu afirmaţia că măcar una dintre cutii va conţine cel puţin $\left\lfloor \frac{n}{c} \right\rfloor + 1$ obiecte, sau varianta infinită, unde un număr infinit de obiecte sunt plasate într-un număr finit de cutii, şi atunci măcar una dintre cutii va conţine un număr infinit de obiecte. O formă mai specială, pe care Littlewood a numit-o argument de medie, este că dacă n variabile au suma s (sau, pozitive fiind, produsul p), atunci măcar una va avea o valoare de cel mult $\frac{s}{n}$ (respectiv $\sqrt[n]{p}$), şi evident măcar o alta va avea o valoare de cel puţin $\frac{s}{n}$ (respectiv $\sqrt[n]{p}$).

Aplicaţiile acestui principiu abundă; vă invit la sarcina detectivă de a descoperi chiar în cadrul acestei lecţii, măcar trei utilizări ale sale (mai mult sau mai puţin ascunse).

2.2. **Principiul Elementului Extremal.** Un al doilea principiu capital este cel denumit al Elementului Extremal. Pentru totalitatea obiectelor, sau totalitatea configuraţiilor propuse de o problemă, se pot deduce, în cele mai multe cazuri, foarte puţine adevăruri generale, globale, din ipotezele date, sau altfel problema este banală sau uşoară. Dar dacă ne restrângem la doar unele dintre ele, evidenţiate de vreo proprietate specială (foarte des maximalitate sau minimalitate relativ la o măsură oarecare, cum ar fi de exemplu valoare, distanţă, arie, etc.), atunci avem şanse mai bune de a căpăta informaţii mai precise. Ca exemplu, vă propun demonstraţia iraţionalităţii lui $\sqrt{2}$, care apare şi în lecţia de numere reale pentru clasele de liceu, provenind din [1], liber disponibilă în format .pdf la [2]. Este remarcabil că demonstraţia nu foloseşte argumente de divizibilitate (proprietăţile determinate de Euclid ale numerelor prime), ci are o aromă combinatorică.

Teorema 1. *Numărul $d = \sqrt{2}$ (pentru care $d^2 = 2$) nu este număr raţional.*

Demonstraţie. *Fie $d = \frac{p}{q}$ (p, q întregi pozitivi), cu q minimal. Deoarece $d^2 = 2$, deci $1 < d < 2$, avem atunci $q < p < 2q$, astfel încât*

$$\frac{2pq}{pq} = 2, \quad \frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \text{şi} \quad \frac{2pq - p^2}{pq - q^2} = 2 = \frac{p(2q - p)}{q(p - q)}.$$

Astfel $d = \frac{2q-p}{p-q}$. Dar $p < 2q$ şi $p - q < q$; deci avem o reprezentare raţională a lui d cu numitorul mai mic decât cel minimal! ■

Metoda aşa-numită a Coborârii Infinite a lui Fermat este strâns înrudită cu Principiul Elementului Extremal. Dacă în demonstraţia de mai sus omitem alegerea minimală a lui q, obţinem o nouă scriere a lui $d = \frac{2q-p}{p-q} = \frac{p'}{q'}$, cu numitorul q' strict mai mic decât q. Continuând, ca într-o buclă a unui algoritm, obţinem numitori pozitivi din ce în ce mai mici, ceea ce nu se poate repeta ad infinitum, căci în cel mult q paşi am coborî sub valoarea minimă pozitivă posibilă 1.

3. Aplicaţii

3.1. **Aritmetică.** Ceea ce micuţul Gauss (spune legenda) a descoperit, dincolo de numărarea propriu-zisă, are farmecul şi apelul lucrului simplu dar genial, care trece peste obstacol prin transcenderea lui. Pus la greaua muncă de către învăţătorul său de a calcula suma numerelor întregi pozitive de la 1 la 100, Gauss a înşirat numerele pe două rânduri astfel

$$1 + 2 + \cdots + 99 + 100$$
$$100 + 99 + \cdots + 2 + 1$$

şi a observat că, două câte două, numerele situate unul sub celălat, au suma 101. Cum apar 100 de astfel de coloane, şi cum suma finală este evident dublul sumei căutate, se calculează valoarea $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$. Chiar şi în zilele noastre, metoda de a calcula suma S a primilor n termeni ai unei progresii aritmetice $a, a+r, \ldots, a+(n-1)r, \ldots$ este aceeaşi: se adună pe perechi cu cei n termeni scrişi în sens invers, şi se obţine $S = \frac{n(2a+(n-1)r)}{2} = na + \frac{n(n-1)}{2}r$.

Suma S a primilor n termeni ai unei progresii geometrice de raţie $q \neq 1$ $a, qa, \ldots, q^{n-1}a, \ldots$ se calculează cu o metodă derivată din cea de mai sus: mai întâi se înmulţesc toţi termenii cu raţia q, apoi se scriu decalat cu o poziţie

$$S = a + qa + q^2a + \cdots + q^{n-2}a + q^{n-1}a$$

$$qS = \qquad qa + q^2a + \cdots + q^{n-2}a + q^{n-1}a + q^na$$

în final se scad pe perechi, şi se obţine $S = a\frac{1-q^n}{1-q}$.

Erdös propune următoarea (clasică azi)

Problemă. Fiind date n numere întregi (nu neapărat distincte), să se arate că există unele dintre ele, a căror sumă să fie divizibilă prin n (evident $n-1$ numere nu sunt de ajuns în general, căci le putem alege toate egale cu 1).

Soluţie. Dificultatea este că cele $2^n - 1$ posibilităţi de a alege numerele (combinatorica ne învaţă de ce atâtea!) sunt prea multe, nu ne descurcăm, şi nu ajungem la concluzie. Trucul[1] este de a alege doar câteva dintre posibilităţi. Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$; să considerăm sumele $s_0 = 0$, $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, …, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Printre aceste $n+1$ numere se vor găsi două, fie ele s_i şi s_j, cu $0 \leq i < j \leq n$, care să dea acelaşi rest la împărţirea prin n. Dar atunci $s_j - s_i$ este divizibil prin n, şi evident reprezintă o sumă de numere dintre cele date. □

Un fapt tipic în problemele de combinatorică este acela că uneori o mică schimbare în condiţiile problemei o transformă în mod radical, atât în ceea ce priveşte dificultatea ei, cât şi în metodele folosite. Dacă se dau $2n-1$ numere întregi, şi se cere acelaşi lucru, dar cu condiţia să alegem exact n dintre numere, a căror sumă să fie divizibilă prin n, aceasta devine dificila teoremă Erdös-Ginzburg-Ziv. Nu voi comenta pentru cazul general decât că $2n-1$ numere sunt în general necesare, căci fiind date doar $2n-2$ numere, ele pot fi $n-1$ dintre ele egale cu 0 şi celelalte $n-1$ egale cu 1, şi concluzia devine falsă. Cu toate acestea, pentru un caz particular (în speţă $n = 6$), poate exista o soluţie directă simplă.

Problemă. Fiind date 11 numere întregi (nu neapărat distincte), să se arate că există 6 dintre ele, a căror sumă să fie divizibilă prin 6.

[1]Cineva a definit metoda ca fiind un truc care a putut fi aplicat de măcar două ori!

Soluţie. Este uşor de verificat că dintre orice 3 numere întregi, putem găsi două cu suma pară (acesta este chiar cazul particular $n = 2$), şi că dintre orice 5 numere întregi, putem găsi trei cu suma divizibilă prin 3 (acesta este chiar cazul particular $n = 3$).

Acum, fiind date $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$, putem presupune că $b_1 = a_1 + a_2$ este par (altfel reindexăm). La fel, putem presupune că $b_2 = a_3 + a_4$ este par, ..., $b_5 = a_9 + a_{10}$ este par. Dintre cei cinci întregi pari b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, putem deci găsi trei cu suma divizibilă prin 3. Dar suma acestor trei este egală cu suma celor 6 numere a_i care le formează, deci am găsit 6 numere dintre cele date, cu suma divizibilă prin 6. □

În final, demonstraţia mea favorită printre multele cunoscute ale micii teoreme a lui Fermat. Aceeaşi idee se aplică la generalizarea ei dată de Euler.

Teorema 2. *Fie p un număr prim, şi a un întreg pozitiv relativ prim cu p. Atunci p divide numărul $a^{p-1} - 1$.*

Demonstraţie. *Să considerăm cele $p-1$ numere $a, 2a, \ldots, (p-1)a$, fiecare nedivizibil prin p. Pentru oricare două dintre aceste numere, fie ele ia şi ja, cu $1 \leq i < j \leq p-1$, numărul $a_j - a_i = (j-i)a$ este nedivizibil prin p, căci $0 < j - i < p$. Aceasta înseamnă că cele $p-1$ numere dau resturi disticte şi nenule la împărţirea prin p, deci reprezintă toate aceste resturi. Atunci produsul lor $a^{p-1}(p-1)!$ dă acelaşi rest la împărţirea prin p ca şi $(p-1)!$, deci p divide diferenţa lor $(a^{p-1}-1)(p-1)!$, adică p divide numărul $a^{p-1} - 1$.* ■

3.2. **Geometrie.** Problemele combinatorice din geometrie sunt destul de diferite de cele, să zicem, ale geometriei sintetice. Un exemplu este edificator.

Problemă. Fiind dat un poligon convex cu 9 vârfuri în plan, să se arate că există două diagonale care fac între ele un unghi mai mic de $7°$.

Soluţie. Calcularea numărului de diagonale este un prim, simplu, exerciţiu combinatoric în această problemă. Din fiecare vârf pleacă 6 diagonale; sunt date 9 vârfuri, iar fiecare diagonală este numărată de două ori (câte odată pentru fiecare vârf unde ea are un capăt), deci există $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ diagonale.

Alegem acum un punct P oarecare în plan şi ducem prin P câte o dreaptă paralelă pentru fiecare dintre diagonale. Dacă două diagonale sunt paralele, am terminat, căci unghiul făcut între ele este $0°$. Dacă nu, în jurul lui P s-au format 54 semidrepte (câte două pentru fiecare diagonală), care împart cele $360°$ grade din jurul lui P în 54 sectoare. Atunci măcar unul dintre unghiurile formate între două semidrepte consecutive dintr-o parcurgere în sensul acelor de ceasornic va fi cel mult $\left(\frac{360}{54}\right)^\circ < 7°$. □

3.3. **Teoria Mulţimilor.** Problemele combinatorice din teoria mulţimilor sunt printre cele mai apreciate, căci nu presupun nici o tehnică particulară specială a acestui domeniu.

Problemă. Fiind dată o familie (finită sau infinită) $\mathcal{F} = (X_i)_{i \in I}$ de mulţimi cu $|X_i| \le n$, astfel încât intersecţia a oricare $n+1$ dintre ele este nevidă, atunci intersecţia tuturor este nevidă.

Soluţie. Fie $A \neq B$ două dintre mulţimi (dacă toate sunt egale, rezultatul este trivial); atunci $0 < |A \cap B| < n$, deci $A \cap B = \{x_1, \dots, x_k\}$, cu $1 \le k \le n-1$. Presupunând rezultatul a fi fals, pentru orice element x_i va exista (cel puţin) o mulţime X_i astfel încât $x_i \notin X_i$ (mulţimile X_i nu sunt neapărat distincte). Dar atunci cele cel mult $n+1$ mulţimi $A, B, X_1, \dots, X_k$ vor avea intersecţie nevidă; fie x un element comun, atunci în mod evident $x \neq x_i$ pentru orice i, dar de asemenea $x \in A \cap B$, absurd. Pe de altă parte, fie o mulţime cu $n+1$ elemente, şi familia celor $n+1$ submulţimi de câte n elemente fiecare; oricare n dintre ele au intersecţia nevidă, dar intersecţia tuturor este vidă, ceea ce arată că rezultatul este cel mai bun posibil. Observaţi similaritatea cu teorema lui Helly. □

4. Încheiere

Vom reveni în lecţii ulterioare cu detalii asupra altor metode combinatorice, pentru a suplini paucitatea rezultatelor din manualele şcolare, cu atât mai mult cu cât astfel de probleme apar tot mai des în cadrul concursurilor naţionale şi internaţionale. Varietatea combinatoricii este imposibil de cuprins în întregime, dar vom vorbi despre teoria grafurilor, funcţii caracteristice, principiul includerii-excluderii şi multe altele din colecţia de giuvaere ale acestui domeniu favorit. De asemenea, materiale suplimentare şi o bibliografie adecvată vor fi disponibile pe acest site.

References

[1] Moser, Leo, *An Introduction to the Theory of Numbers*, The Trillia Group, (2004).
[2] The Trillia Group, `http://www.trillia.com/moser-number.html`