CERCUL LUI EULER ŞI DREAPTA LUI SIMSON

ABSTRACT. Articolul prezintă două rezultate deosebite legate de patrulaterul inscriptibil şi câteva consecinţe ce decurg din aceste rezultate.

Lecţia se adresează clasei a VIII-a.

Data: 23 noiembrie 2009

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

Introducere

Pentru început să observăm că dintre patrulaterele studiate numai o parte sunt inscriptibile. Concret, acestea sunt: dreptunghiul, pătratul şi trapezul isoscel. Justificarea este evidentă.

Dreptunghiul şi pătratul au toate unghiurile drepte şi atunci suma a două unghiuri opuse este 180^0, deci sunt inscriptibile.

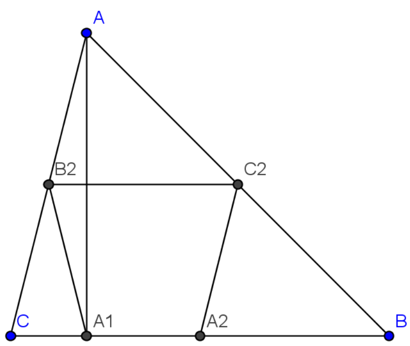
Trapezul isoscel are unghiurile alăturate unei baze congruente şi atunci, de aici şi din suma unghiurilor într-un patrulater deducem că suma a două unghiuri opuse este 180^0, adică trapezul isoscel este un patrulater inscriptibil.

Remarca de mai sus ne permite să demonstrăm că un patrulater este inscriptibil arătând că acesta este dreptunghi, pătrat sau trapez isoscel.

Să rezolvăm acum două probleme.

Problema 1: În triunghiul ABC notăm cu A_1 piciorul înălţimii din A şi cu A_2, B_2, C_2 mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Arătaţi că patrulaterul $A_1A_2C_2B_2$ este inscriptibil.

Soluţie: Vom arăta că patrulaterul $A_1A_2C_2B_2$ este trapez isoscel şi în conformitate cu cele spuse mai sus este inscriptibil.



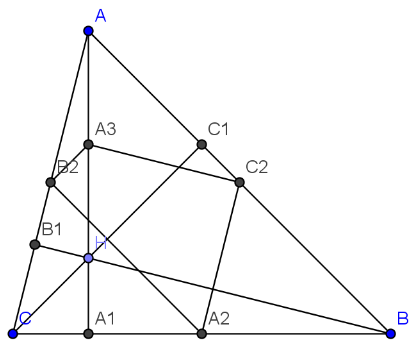
Mai întâi, $B_2C_2 \parallel BC$ (B_2C_2 este linie mijlocie în triunghiul ABC) şi deci $A_1A_2C_2B_2$ este trapez.

Acum, $A_2C_2 = \dfrac{AC}{2}$ deoarece A_2C_2 este linie mijlocie în triunghiul ABC, iar $A_1B_2 = \dfrac{AB}{2}$ ca mediană corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic

ACA_1. Rezultă $[A_2C_2] \equiv [A_1B_2]$ şi atunci trapezul $A_1A_2C_2B_2$ este isoscel, deci patrulater inscriptibil.

Problema 2: În triunghiul ABC notăm A_2, B_2, C_2 mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB şi A_3 mijlocul segmentului AH, unde H este ortocentrul triunghiului. Arătaţi că patrulaterul $A_2C_2A_3B_2$ este inscriptibil.

Soluţie: Vom arăta că unghiurile $A_2B_2A_3$ şi $A_2C_2A_3$ sunt unghiuri drepte.



În triunghiul AHC, B_2A_3 este linie mijlocie deci $B_2A_3 \parallel CH$. (1).

$A_2B_2 \parallel AB$ (2) (linie mijlocie în triunghiul ABC). Din (1), (2) şi $CH \perp AB$ rezultă $A_2B_2 \perp B_2A_3$, deci $m(\widehat{A_2B_2A_3}) = 90^0$ (3). Analog rezultă $m(\widehat{A_2C_2A_3}) = 90^0$ (4).

Din (3) şi (4) avem $m(\widehat{A_2B_2A_3}) + m(\widehat{A_2C_2A_3}) = 180^0$ şi deci patrulaterul $A_2C_2A_3B_2$ este inscriptibil.

Cercul lui Euler

Problema 3: Într-un triunghi ABC considerăm punctele A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C, A_2, B_2, C_2 mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB şi A_3, B_3, C_3 mijloacele segmentelor AH, BH, respectiv CH (H fiind ortocentrul triunghiului). Punctele $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ sunt pe un cerc numit *cercul lui Euler* sau *cercul celor nouă puncte*.

Soluţie: Pentru rezolvare ne vom folosi de problemele 1 şi 2 din **Introducere**.

Fie Ω cercul determinat de punctele A_2, B_2, C_2.

Din problema 1 avem $A_1A_2C_2B_2$ patrulater inscriptibil, deci $A_1 \in \Omega$.

Raţionamentul din problema 1 rămâne valabil şi pentru patrulaterele $B_1A_2C_2B_2$, respectiv $C_1C_2A_2B_2$. Aşadar $B_1 \in \Omega$ şi $C_1 \in \Omega$. Am arătat astfel că şase din punctele considerate sunt pe acelaşi cerc.

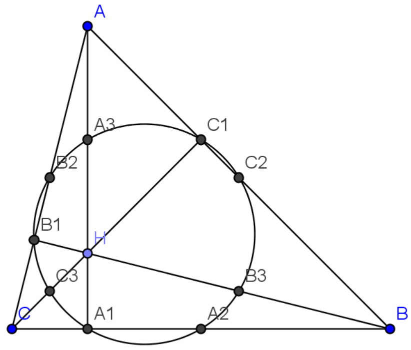
Din problema 2 avem $A_2C_2A_3B_2$ patrulater inscriptibil, deci $A_3 \in \Omega$.

Raţionamentul din problema 2 rămâne valabil şi pentru patrulaterele $A_2B_3C_2B_2$, respectiv $A_2C_2B_2C_3$. Aşadar $B_3 \in \Omega$ şi $C_3 \in \Omega$.

În concluzie punctele $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ sunt pe un cerc, cercul Ω.

Cu notaţiile din problema 3 avem:

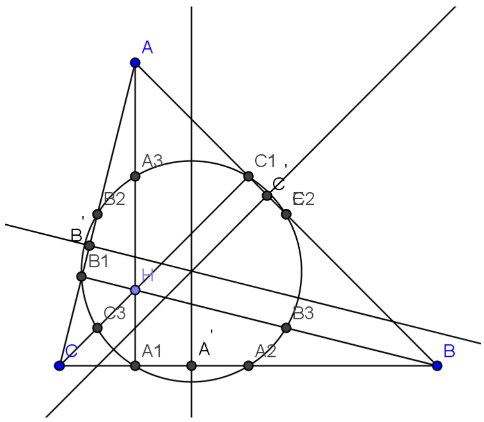
Obsevaţia 1: Dreptele A_2A_3, B_2B_3 şi C_2C_3 sunt concurente, punctul lor de intersecţie fiind centrul cercului lui Euler (cercul Ω).



Soluţie: Din problema 2, $m(\widehat{A_2C_2A_3}) = 90^0$, deci $[A_2A_3]$ este diametru în cercul Ω. Analog, $[B_2B_3]$ şi $[C_2C_3]$ sunt diametre în cercul Ω. Rezultă evident că dreptele A_2A_3, B_2B_3 şi C_2C_3 sunt concurente şi punctul lor de intersecţie este centrul cercului lui Euler.

Obsevaţia 2: Fie $A^{'}$ mijlocul lui $[A_1A_2]$, $B^{'}$ mijlocul lui $[B_1B_2]$ şi $C^{'}$ mijlocul lui $[C_1C_2]$. Perpendicularele în $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ pe laturile BC, AC, respectiv AB ale triunghiului ABC sunt concurente, punctul de intersecţie fiind centrul cercului lui Euler.

Soluţie: $[A_1A_2]$ este coardă în cercul Ω şi atunci perpendiculara prin $A^{'}$ pe A_1A_2 trece prin centrul cercului Ω.

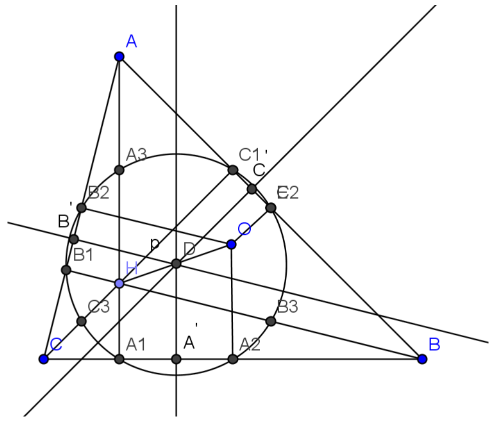


La fel perpendiculara prin $B^{'}$ pe B_1B_2 şi perpendiculara prin $C^{'}$ pe C_1C_2. Aşadar concluzia din observaţia 2 este adevărată.

Obsevaţia 3: Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, H ortocentrul aceluiaşi triunghi şi O_9 centrul cercului lui Euler asociat triunghiului

ABC, atunci punctele O, H, O_9 sunt coliniare (*dreapta lui Euler*) şi O_9 este mijlocul lui HO.

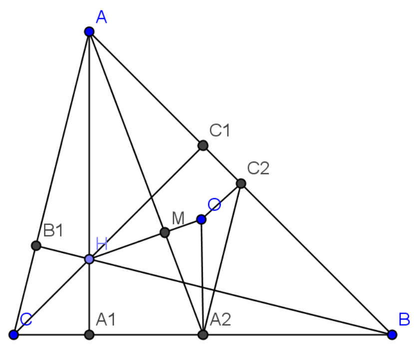
Soluţie: Dacă O este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$, atunci $OA_2 \perp BC$. Cum şi $HA_1 \perp BC$ rezută $OA_2 \parallel HA_1$ şi deci A_1A_2OH este trapez.



Perpendiculara în A' pe BC intersectează pe OH în D. Din $DA' \perp BC$ avem $DA' \parallel A_1H \parallel OA_2$ şi cum A' este mijlocul lui $[A_1A_2]$ rezultă D este mijlocul lui OH. La fel se arată că perpendicularele în B' pe AC şi C' pe AB trec prin D. Dar, din observaţia 2, perpendicularele în A', B', C' pe laturile BC, AC, respectiv AB ale triunghiului ABC sunt concurente, punctul de intersecţie fiind centrul cercului lui Euler. În concluzie $D = O_9$ (O_9 este centrul cercului lui Euler). Aşadar, O, H, O_9 sunt coliniare (*dreapta lui Euler*) şi O_9 este mijlocul lui HO.

Obsevaţia 4: Centrul de greutate al unui triunghi se află pe dreapta lui Euler asociată triunghiului.

Soluţie: Fie $\{M\} = AA_2 \cap OH$, atunci $\triangle AMH \sim \triangle A_2MO$ ($A_2O \parallel AH$). Atunci $\dfrac{MA_2}{MA} = \dfrac{OA_2}{AH}$.



Dar $\dfrac{OA_2}{AH} = \dfrac{1}{2}$ ($\triangle OA_2C_2 \sim \triangle HAC$ (!)) şi atunci $\dfrac{MA_2}{MA} = \dfrac{1}{2}$. Cum AA_2 este mediană în triunghiul ABC deducem că M este centrul de greutate al triunghiului ABC, aşadar centrul de greutate al unui triunghi se află pe dreapta lui Euler asociată triunghiului.

Dreapta lui Simson

Problema 4: Fie D un punct pe arcul mic AB al cercului circumscris triunghiului ABC. Proiecţiile lui D pe laturile triunghiului sunt trei puncte coliniare (*Dreapta lui Simson*).

Soluţie: Notăm cu E, F, G proiecţiile lui D pe laturile BC, AB, respectiv AC. Arătăm că punctele E, F, G sunt coliniare demonstrând că $\widehat{EFB} \equiv \widehat{AFG}$.

În patrulaterul $BEFD$ avem $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{BFD}) = 90^0$. Rezultă $BEFD$ patrulater inscriptibil (unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală).

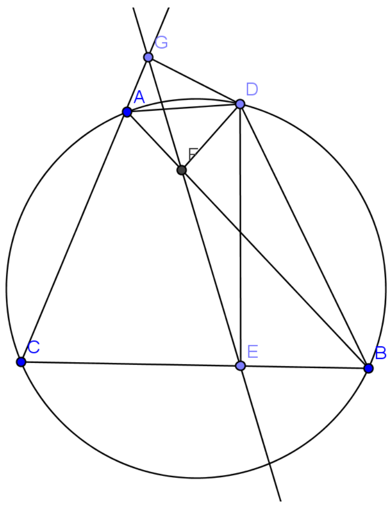
De aici $\widehat{EFB} \equiv \widehat{EDB}$ (1).

În patrulaterul $AFDG$ avem $m(\widehat{AFD}) = m(\widehat{AGD}) = 90^0$ şi de aici $m(\widehat{AFD}) + m(\widehat{AGD}) = 180^0$. Deducem că patrulaterul $AFDG$ este inscriptibil (suma măsurilor a două unghiuri opuse este 180^0).

De aici $\widehat{AFG} \equiv \widehat{ADG}$ (2).

Pe de altă parte, din $\triangle DEB$ avem $m(\widehat{EDB}) = 90^0 - m(\widehat{EBD})$ (3), iar din $\triangle ADG$ avem $m(\widehat{ADG}) = 90^0 - m(\widehat{DAG})$ (4).

Cum patrulaterul $ACBD$ este inscriptibil rezultă $\widehat{CBD} \equiv \widehat{GAD}$ (5).



Din (3),(4) şi (5) deducem că $\widehat{EDB} \equiv \widehat{ADG}$ (6), iar din (1), (2) şi (6) obţinem $\widehat{EFB} \equiv \widehat{AFG}$. Din ultima relaţie şi din faptul că punctele A, F, B sunt coliniare rezultă că punctele E, F, G sunt coliniare.

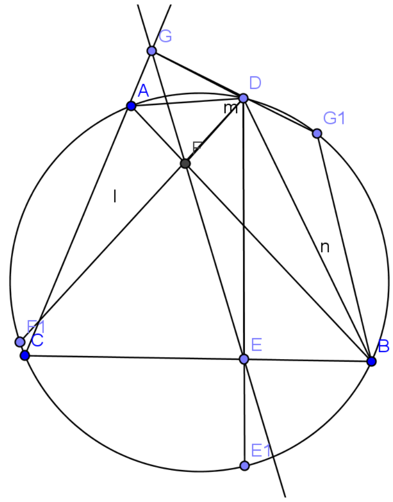
Cu notaţiile din problema 4 putem formula câteva observaţii.

Observaţia 5: Dacă notăm cu E_1 punctul în care proiectanta DE intersectează a doua oară cercul şi analog F_1 şi G_1, atunci dreptele AE_1, BG_1 şi CF_1 sunt paralele cu dreapta lui Simson asociată punctului D şi triunghiului ABC.

Soluţie: Vom demonstra că $BG_1 \parallel EG$. Analog se demonstrează pentru celelalte drepte.

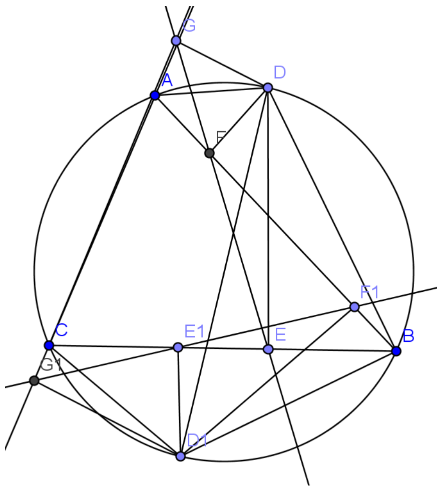
Din problema 4 avem $\widehat{EFB} \equiv \widehat{ADG}$ (1), iar din patrulaterul inscriptibil ABG_1D avem $\widehat{ADG} \equiv \widehat{ABG_1}$(2). Din (1) şi (2) rezultă $\widehat{EFB} \equiv \widehat{FBG_1}$ (3).

Acum, pentru dreptele EG şi BG_1 şi secanta FB avem $\widehat{EFB} \equiv \widehat{FBG_1}$ (unghiuri alterne interne), deci $EG \parallel BG_1$.



Observaţia 6: Fie D şi D_1 puncte diametral opuse pe cercul circumscris triunghiului ABC. Dreptele Simson asociate punctelor D şi D_1 sunt perpendiculare.

Soluţie: Vom folosi pentru demonstraţie faptul că dacă două unghiuri congruente au o pereche de laturi perpendiculare, atunci şi celelalte două laturi sunt perpendiculare.



Din patrulaterul inscriptibil $BEFD$ avem $\widehat{EFB} \equiv \widehat{EDB}$ (1).

Din patrulaterul inscriptibil $E_1F_1BD_1$ avem $\widehat{E_1F_1D_1} \equiv \widehat{E_1BD_1}$ (2).

Din $DB \perp BD_1$ (DD_1 sunt diametral opuse) şi $DE \perp BE_1$ (din construcţie) rezultă $\widehat{EDB} \equiv \widehat{E_1BD_1}$ (3).

Din (1), (2) şi (3) rezultă $\widehat{EFB} \equiv \widehat{E_1F_1D_1}$ şi cum $FB \perp F_1D_1$ deducem că $FE \perp F_1E_1$.

Bibliografie:

[1] Mihalescu C, Geometria elementelor remarcabile, Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Bucureşti, 2007

[2] Ţiţeica Gh, Probleme de geometrie, Ediţia a VI-a, Editura tehnică, Bucureşti