Comentarii la a 18-a Balcaniadă de Matematică Juniori
jBMO 2014, Ohrid – Macedonia

ABSTRACT. Comments on the problems of the 18th jBMO (the Junior Balkan Mathematical Olympiad), Ohrid – Republic of Macedonia, June 21–26, 2014.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII, IX.
Data: 30 iunie 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere şi Conţinut

Această prezentare, însoţită de comentarii asupra celei de a 18-a jBMO (Balcaniada de Matematică Juniori), Ohrid – Macedonia, 21–26 iunie 2014, este după un acum vechi şi cunoscut tabiet, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

Subiectul (1). *Rezolvaţi în numere naturale prime distincte p, q şi r ecuaţia*

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

???

Soluţie. Condiţia de primalitate asupra lui r se va dovedi inutilă – ce să mai zicem de enunţarea cu totul nejustificată a condiţiei ca numerele să fie distincte? Coeficienţii 3 şi 5 înşişi ne invită să facem consideraţii modulo aceste numere

• modulo 3 ecuaţia se scrie $q^4 - r^2 \equiv -1 \pmod 3$. Resturile pătratice modulo 3 sunt $\{0, 1\}$ iar cele bi-pătratice sunt tot $\{0, 1\}$; singura posibilitate este atunci $(q^4, r^2) \equiv (0, 1) \pmod 3$, deci $3 \mid q$, aşadar $\boxed{q = 3}$;

• modulo 5 ecuaţia se scrie $3p^4 + r^2 \equiv 1 \pmod 5$. Resturile pătratice modulo 5 sunt $\{0, \pm 1\}$ iar cele bi-pătratice sunt $\{0, 1\}$; singura posibilitate este atunci $(p^4, r^2) \equiv (0, 1) \pmod 5$, deci $5 \mid p$, aşadar $\boxed{p = 5}$.

Prin urmare $4r^2 = 3 \cdot 5^4 - 5 \cdot 3^4 - 26 = 4 \cdot 19^2$, aşadar $\boxed{r = 19}$, care este număr prim doar în mod coincidental. Proastele moravuri sunt molipsitoare; o aceeaşi supra-calificare a enunţului, cu o îndoielnică motivaţie estetică, şi o evidentă posibilitate de a înceţoşa soluţia (prin încercări inutile de a folosi primalitatea lui r). □

Mulţumirile mele sincere celor cu care am dialogat cu privire la problemele propuse, sau ale căror soluţii le-am împrumutat de pe acest site esenţial care este AoPS – lucruri care au condus la materialul de faţă.

Vezi – `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php` – jBMO, 2014.

[1]Toate informaţiile la `http://www.massee-org.eu/index.php/mathematical/jbmo`, şi mai ales la `http://www.jbmo2014.smm.com.mk/`. Rezultatele pentru fiecare echipă pot fi văzute prin tab-ul PARTICIPANTS.

Remarcă. O ecuaţie diofantică fără niciun chichirez, urâtă prin expresie şi trivială prin soluţie, chiar pentru o Problemă 1 de la jBMO. Ha! soluţia oficială (singura dată, fără alte alternative!) ”reuşeşte” să chiar folosească primalitatea lui r, într-un exerciţiu de virtuozitate gratuită şi ridiculă!

Încercând să salvăm câte ceva din această întrebare, să analizăm în general ecuaţia $3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = N$, unde $N \equiv 11 \pmod{15}$, pentru a permite concluziile modulo 3 şi 5. Analiza duce ca mai sus la $(p, q) = (5, 3)$, şi deci $4r^2 = 3 \cdot 5^4 - 5 \cdot 3^4 - N = 1470 - N$. Aceasta forţează $N \equiv 26 \pmod{60}$, cu $N < 1470$, şi se ajunge rapid la singurele posibilităţi $r \in \{1, 4, 11, 16, 19\}$. Se vede atunci că şi valoarea $N = 16 \cdot 60 + 26 = 986$ conducea la $r = 11$ prim, în timp ce valoarea $N = 23 \cdot 60 + 26 = 1406$ conduce la $\sqrt{r} = 2$ prim, deci la soluţia în prime $(p, q, s) = (5, 3, 2)$ pentru ecuaţia $3p^4 - 5q^4 - 4s^4 = 1406$ (măcar o ţâră mai estetică decât cea dată, folosind exclusiv puteri ^{4}).

Subiectul (2)**.** *Considerăm un triunghi ascuţitunghic ABC de arie S. Fie $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$), $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Notăm cu H_1, respectiv H_2, ortocentrul triunghiului MNC, respectiv MND. Determinaţi aria patrulaterului AH_1BH_2 în funcţie de S.*

Bulgaria

Soluţie. Tristul adevăr este că o **generalizare** a acestei probleme a fost dată la concursul Zhautykov 2012 din Kazahstan, ziua 1, problema 1. Problema şi soluţia mea de atunci sunt de găsit pe AoPS la adresa dată, dar pentru completitudine le reproduc aici (în limba engleză în original).

> An acute triangle ABC is given. Let D be an arbitrary inner point of the side AB. Let M and N be the feet of the perpendiculars from D to AC and BC, respectively. Let H_1 and H_2 be the orthocentres of the triangles MNC and MND, respectively. Prove that the area of the quadrilateral AH_1BH_2 does not depend on the position of D on AB.

Solution. The problem is based upon, and hides a simple

Lemma. For any secant of a parallelogram, the algebraic sum of the distances from one pair of opposite vertices of the parallelogram to that secant is equal to the algebraic sum of the distances from the other pair of opposite vertices of the parallelogram to that secant, both being equal to twice the distance from the centre of the parallelogram to that secant.

Proof. The proof is immediate, by considering the similar ratios of the segments involved; no actual computations are involved. ■

Now, the whole set-up is made so that such parallelograms are created (the only reason points M and N are taken as feet of perpendiculars from D is so that the use of orthocentres creates parallel lines). This creates parallelograms NH_1MD and CNH_2M, so twice applying the Lemma yields

$$\mathrm{d}(M, AB) + \mathrm{d}(N, AB) = \mathrm{d}(D, AB) + \mathrm{d}(H_1, AB),$$

$$\mathrm{d}(M, AB) + \mathrm{d}(N, AB) = \mathrm{d}(C, AB) - \mathrm{d}(H_2, AB),$$

whence $\mathrm{d}(H_1, AB) + \mathrm{d}(H_2, AB) = \mathrm{d}(C, AB)$, leading to the equality of areas $\boxed{[AH_1BH_2] = [ABC]}$, independently of the position of D on the side AB.

Revenind la problema noastră, înseamnă că având D piciorul înălţimii din C, acesta este doar un caz particular, pentru care deci aria patrulaterului AH_1BH_2 este chiar S. $\square$

Soluţie Alternativă. Chiar şi pentru problema generală, unde D este orice punct pe AB, configuraţia care contează este dată de patrulaterul $CMDN$, înscris în cercul de diametru CD (căci $\angle CMD = \angle CND = \pi/2$). Mulţimile $\{M, N, C, H_1\}$ şi $\{M, N, D, H_2\}$ sunt *sisteme ortocentrice*, adică, în fiecare dintre ele, fiecare punct este ortocentrul celorlalte trei. Prin urmare patrulaterele NH_1MD şi CNH_2M sunt paralelograme; rezultă că H_1C şi H_2D sunt paralele şi egale, deci H_1H_2DC este paralelogram, aşadar H_1H_2 şi CD sunt paralele şi egale, şi totul s-a cam terminat ... (vezi mai jos). $\square$

Soluţie Alternativă. (Ştefan Tudose) Alegem originea coordonatelor din plan în mijlocul O al segmentului CD. Notând cu $x = \overrightarrow{OX}$ vectorul de poziţie al punctului X, avem din relaţia lui Sylvester $h_1 = m+n+c$ şi $h_2 = m+n+d$, de unde $\overrightarrow{H_1H_2} = h_2 - h_1 = d - c = \overrightarrow{CD}$, şi totul s-a cam terminat ... căci $[AH_1BH_2] = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{H_1H_2}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right| = [ABC]$. $\square$

Remarcă. O problemă folosită chiar mai mult decât atare – într-o formă mai generală – chiar într-o recentă altă competiţie internaţională, este un incident cam ruşinos. Ce-o fi fost în mintea propunătorului? Iar condiţia ca $\triangle ABC$ să fie ascuţitunghic este superfluă. Rezultatul poate fi uşor ”ghicit” din chiar formularea problemei – un caz particular trebuie să dea aceeaşi valoare ca şi oricare alt caz general.

Subiectul (3)**.** *Fie a, b, c numere reale pozitive, cu $abc = 1$. Demonstraţi inegalitatea*

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{c}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a+b+c+1).$$

Când se obţine egalitate?

???

Soluţie. Era suficient să fie dat $abc \leq 1$. Avem

$$\sum_{cyc}\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 = \sum_{cyc}\left(a^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}\right) + \sum_{cyc}\frac{a}{b} = \sum_{cyc}\left(a^2+\frac{b}{c}+\frac{1}{b^2}\right) + \sum_{cyc}\frac{a}{b}.$$

Dar din inegalitatea mediilor

$$\sum_{cyc}\left(a^2+\frac{b}{c}+\frac{1}{b^2}\right) \geq \sum_{cyc} 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{cba}} \geq 3\sum_{cyc} a \quad \text{şi} \quad \sum_{cyc}\frac{a}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{bca}} = 3,$$

de unde rezultă inegalitatea cerută, cu egalitate doar când $a = b = c = 1$. Să observăm că dacă $abc > 1$ atunci nu mai putem controla rezultatul; dacă luăm de exemplu $a = b = c > 1$, atunci inegalitatea devine de fapt $(a-1)(a^3 - 2a^2 - a - 1) < 0$ pentru $1 < a < 2$, dar şi > 0 pentru $a > 3$. $\square$

Soluţii Alternative. Clasica substituţie $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{x}$ nu face decât *to muddy the waters*; nu aduce nimic nou, şi forţează $abc = 1$ (pierzând relaxarea condiţiei). Cu siguranţă că metoda *brute force* duce şi ea rapid la soluţie. Alte metode, generalizări, etc. pot fi găsite la adresa AoPS dată. Soluţia oficială propune nu mai puţin de 5 (cinci!) abordări alternative. $\square$

Remarcă. O inegalitate extrem de simplă. Puţini dintre primii 50 de concurenţi s-au împiedicat de ea (notabil – cel mai bun dintre francezi, care a ratat medalia de Aur din această pricină).

Subiectul (4)**.** *Numărul întreg $n \geq 1$ este arbitrar, dar fixat. Doi jucători A şi B joacă următorul joc. Fiind dată o grămadă cu $s \geq 1$ pietricele, jucătorii elimină alternativ (A fiind primul la mutare) un număr de pietricele egal cu 1, sau un număr prim, sau un multiplu nenul al lui n. Câştigătorul este cel care elimină ultima pietricică. Presupunând că atât A cât şi B folosesc strategia optimă, determinaţi pentru câte valori ale lui s nu poate câştiga A.*

România – Marius Bocanu

Preambul. Să considerăm următorul joc general. Fiind dată o grămadă cu $s \geq 0$ pietricele, o mutare legală constă în a elimina $m \leq s$ pietricele, unde $m \in M_s \subseteq \mathbb{N}^*$ (M_s conţine mutările permise pentru o grămadă de talie s; din motive evidente $0 \notin M_s$). Doi jucători A şi B mută alternativ; pierde cel care nu mai poate face o mutare legală. Se va vedea că este convenabil să includem şi cazul $s = 0$. Analiza retrogradă ne permite clădirea deterministă a mulţimii L de poziţii pierzătoare pentru jucătorul aflat la mutare (numite şi *poziţii-P*); începem cu evidentul $L_0 = \{0\}$, şi când L_k (cu $|L_k| = k+1$) a fost construită, considerăm mulţimea Λ_k a numerelor naturale ℓ mai mari decât $\max L_k$, cu proprietatea că $\ell - m \notin L_k$ pentru niciun $m \in M_\ell$, $m \leq \ell$. Dacă $\Lambda_k = \emptyset$, obţinem $L = L_k$; dacă nu, luăm $L_{k+1} = L_k \cup \{\min \Lambda_k\}$ şi continuăm, în final luând $L = \bigcup_{k\geq 0} L_k$.[2] Am insistat să prezint acest rudiment de teorie pentru a ne asigura că poziţiile pierzătoare **pot** fi determinate, strategia de câştig **poate** fi precizată, şi deci nu vorbim cu cuvinte în gol. Astfel de jocuri au fost studiate de J. H. Conway et.al.; ele au fost numite jocuri imparţiale, şi acest tip de joc în particular este numit *subtraction-game*.

Trecem acum la precizări suplimentare, necesare pentru a putea rezolva problema dată.

Soluţie. Să considerăm cazul particular unde este dată o mulţime $S \subseteq \mathbb{N}^*$, iar $M_s = M = S \cup \{kn \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ pentru orice $s \in \mathbb{N}^*$. Să presupunem în continuare că există o mulţime $S' \subseteq \mathbb{N}^*$, $|S'| = n-1$, formată din numere mutual coprime, toate coprime cu n, şi astfel ca $s' \nmid s$ pentru orice $s' \in S'$ şi $s \in S$. Mulţimea L este determinată, ca mai sus. Nu putem avea $|L| > n$, căci atunci, din Principiul Cutiei, vor exista $0 \leq \ell < \ell' \in L$ astfel încât $\ell' \equiv \ell \pmod n$, şi deci pentru $\ell' - \ell = m \in M$ am avea $\ell' - m = \ell \in L$, contradicţie. Să presupunem acum că $|L| < n$. Va exista $r \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $r \not\equiv \ell \pmod n$ pentru fiecare $\ell \in L$. Considerăm şi $|L|$ valori distincte $s'_\ell \in S'$, $\ell \in L$. Sistemul de congruenţe $\begin{cases} x \equiv r \pmod n, \\ x \equiv \ell \pmod{s'_\ell}, \quad \ell \in L \end{cases}$ are o soluţie $x > \max L$, din Lema Chineză a Resturilor. Dar atunci $n \nmid x - \ell$ şi $s'_\ell \mid x - \ell$, deci $x - \ell \notin M$ pentru niciun $\ell \in L$, adică $x - m \notin L$ pentru niciun $m \in M$, ceea ce ar forţa atunci $x \in L$, absurd. Aşadar $|L| = n$, adică $|L^* = L \setminus \{0\}| = \boxed{n-1}$.

[2] Mulţimea L obţinută poate fi finită sau infinită; în acest ultim caz putem întotdeauna trunchia L la un prefix finit augmentând M_s cu toate numerele naturale mai mari decât un anume $\ell \in L$ fixat.

Se poate de fapt demonstra că L va fi lista minimală în ordine lexicografică a n-tupletelor $(\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1})$ pentru care $0 = \ell_0 < \ell_1 < \cdots < \ell_{n-1}$ şi $\ell_j - \ell_i \notin M$ pentru toţi $0 \leq i < j \leq n-1$; astfel de liste există, de exemplu luând $\ell_0 = 0$, $\ell_i \equiv i \pmod{n}$, $\ell_i \equiv 0 \pmod{s'}$ pentru un oarecare $s' \in S'$ şi $1 \leq i \leq n-1$. Proprietatea de mai sus se poate rezuma elegant prin relaţia $(L - L) \cap M = \emptyset$.

La noi, $S = \{1\} \cup \{p \mid p \text{ prim}\}$, iar pentru S' este suficient să luăm $n-1$ pătrate de prime distincte, coprime cu n. □

Se poate dovedi interesant să dăm câteva exemple, şi să calculăm câteva cazuri particulare.

- Pentru $M = \mathbb{N}^*$ avem $L = \{0\}$;
- Pentru $M = \mathbb{N}^* \setminus 2\mathbb{N}^*$ avem $L = 2\mathbb{N}$;
- Pentru $M = \emptyset$ avem $L = \mathbb{N}$.

- Pentru n impar avem $L = \{4k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$;
- Pentru $n = 2$ avem $L = \{0, 9\}$;
- Pentru $n = 4$ avem $L = \{0, 6, 15, 21\}$;
- Pentru $n = 6$ avem $L = \{0, 4, 8, 85, ?, ?\}$;
- Pentru $n = 8$ avem $L = \{0, 4, 10, 14, ?, ?, ?, ?\}$.

Generalizarea pe care am prezentat-o este pentru a înlătura ”misterul” legat de faptul că mulţimea S era formată din 1 şi doar numerele **prime**. Rezultatul rămâne acelaşi dacă augmentăm S cu numerele libere de pătrate, sau cu puterile de prime, sau chiar cu ambele (e uşor de creat o mulţime S' propice, în fiecare caz). Desigur, mulţimea L se poate schimba în mod fundamental, de exemplu prin augmentarea cu numerele libere de pătrate vom avea $L = \{0, 9, 18, 27\}$ pentru $n = 4$.

Vă invit să analizaţi şi alte variante de astfel de jocuri, de exemplu pentru $M_s = \{d \mid 1 \leq d < n, d \mid n\}$, sau $M = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Posibilităţile sunt nesfârşite.

Remarcă. La prima vedere, problema apare înrudită cu una din All-Russia Olympiad 2011, cu un enunţ foarte asemănător, unde însă se dădea $s > n^2$, numerele prime permise erau doar cele mai mici decât n, şi unde se cerea să se arate că A are totdeauna strategie de câştig. În limbajul nostru, se cerea de fapt să se arate că $\max L < n^2$. Cele două probleme se dovedesc însă a fi fundamental diferite. În problema rusească nu contează $|L|$, ci $\max L$ (deşi cu metoda prezentată mai sus se obţine imediat că şi acolo $|L| = n$); pe de altă parte, în problema jBMO, fără acea limitare de valori ale numerelor prime, nu mai rămâne neapărat adevărat că $\max L < n^2$ (după cum se poate vedea din exemplele de mai sus).[3] Variaţiuni care par minore în condiţiile unor astfel de probleme pot duce la rezultate foarte diferite, şi pot necesita metode foarte diferite de abordare, deci îngrijorarea de plagiat sau familiaritate nepermis de apropiată este nefondată.

Problema care a salvat concursul ... În alternativa unei probleme mai uşoare s-ar fi consemnat un alt potop de scoruri maxime. Tematica a fost cea potrivită, şi o analiză atentă descoperă frumuseţi şi abordări nebănuite (deşi soluţia oficială nu este cea mai luminoasă).

[3] Nici aici faptul că se dau mutări numere prime nu este instrumental; orice mulţime de numere naturale mai mici decât n duce la acelaşi rezultat.

2. Încheiere

Site-ul oficial macedonean a amânat atât postarea enunţurilor cât şi cea a soluţiilor oficiale pentru mult prea târziu – multe zile după ce proba a fost dată (enunţurile au apărut, încorporate în soluţii – destul de prost, urât şi stângaci scrise – de abia pe 29 iunie).[4]

Un concurs (să zicem) curăţel, alcătuit însă dintr-o teoria numerelor urâtă, insipidă şi irelevantă, o geometrie bazată pe o configuraţie ultra-cunoscută, apoi o inegalitate extrem de simplă, înainte de climaxul combinatoric mai dificil (dar foarte potrivit ca tematică).[5] Zeci dintre participanţi au rezolvat cu brio primele trei probleme – şi aceasta probabil fără prea mare efort. Din păcate efectul asupra competiţiei este pernicios, reducând întregul concurs la o cursă pentru dovedirea ultimei probleme ☹

Au participat cele 11 ţări membre ale grupului balcanic de state, precum şi alte 6 ţări invitate, plus echipa B a ţării gazdă.

Rezultatele echipei noastre la jBMO 2014, Macedonia, sunt, cu felicitările de rigoare!

Marius PERIANU		Slatina		Leader
Andrei ECKSTEIN		Timişoara		Deputy
Mircea FIANU		Bucureşti		Observer A
Cristian MANGRA		Bucureşti		Observer A
Nume		**Şcoala**	**Puncte**	**Medalie**
Ciprian-Mircea BONCIOCAT	VIII	C.N. Tudor Vianu, Bucureşti	36	Aur
Alexandru MIHALCU	IX	ICHB, Bucureşti	**40**	**Aur**
Mihnea-Gabriel DOICA	VIII	ICHB, Bucureşti	32	Argint
Alexandru PASCADI	IX	C.N. Tudor Vianu, Bucureşti	37	Aur
Tudor PLOPEANU	VIII	ICHB, Bucureşti	37	Aur
Antonie CIOCAN	VIII	Şcoala Nr. 56, Bucureşti	**40**	**Aur**
Echipa României			**222/240**	**1/11 + (7)**

[4]Comunitatea de useri de pe AoPS (`www.mathlinks.ro`) a reuşit să fie, ca de obiceiu, mult mai rapidă, atât în afişarea enunţurilor, cât şi în oferta de soluţii.

[5]Din acest punct de vedere, un concurs ca ”Şcoala cu Ceas” din 2014 la Rm. Vâlcea a fost mult mai reprezentativ decât acest jBMO. Cel puţin, problemă cu problemă, primele trei nu au suferit de hibele evidenţiate şi comentate ale celor de la jBMO.

Punctajul detaliat pe probleme este

Nume	P1	P2	P3	P4	Total	Medalie
Ciprian-Mircea BONCIOCAT	10	10	10	6	36	Aur
Alexandru MIHALCU	10	10	10	10	**40**	**Aur**
Mihnea-Gabriel DOICA	10	10	10	2	32	Argint
Alexandru PASCADI	10	10	10	7	37	Aur
Tudor PLOPEANU	10	10	10	7	37	Aur
Antonie CIOCAN	10	10	10	10	**40**	**Aur**
Echipa României	**60**	**60**	**60**	**42**	**222/240**	**1/11 + (7)**

Ca şi în cazul BMO, odată cu trecerea anilor, gradul de dificultate al acestei competiţii scade. Am face mai bine să ne îndreptăm privirile către Occident, şi să ieşim odată din balcanismul călduţ în care ne complacem; am certitudinea că o cerere de adeziune către MEMO (Middle European Mathematical Olympiad) ar fi favorabil tratată, şi am avea ocazia să ne încrucişăm lăncile mai degrabă cu Austria, Cehia, Polonia, Ungaria şi altele, decât cu Muntenegru, Moldova, Cipru şi Albania. Am citit recent undeva exprimată (de către o persoană presupus avizată) opinia că

"jBMO e foarte importantă; aici a fost mereu pepiniera pentru OIM"

Ceea ce este **important** este că juniorii se pregătesc din greu, şi ajung într-un târziu să se întreacă între ei către echipa de Olimpiadă Internaţională. Nu atât participarea la **acest** concurs în particular, care deseori este mult sub gradul de dificultate a Testelor de Selecţie pentru formarea echipei. Este mult mai greu să te califici în echipă decât să te întorci cu o medalie importantă (Aur sau Argint) de la jBMO, iar concurenţa este şi ea mult mai puternică în ţară decât acolo. Ceea ce ar trebui să existe este prezenţa cât mai multor competiţii **serioase** unde aceşti copii să participe şi să câştige experienţă pentru viitor.

Câteva comentarii finale. Trei dintre participanţii din România studiază la ICHB (Liceul Internaţional de Informatică din Bucureşti), unde mă bucur să îi întâlnesc săptămânal, în cadrul prelegerilor mele de combinatorică (şi nu numai). Liceul T. Vianu obişnuia şi el, în trecut, să organizeze şedinţe de pregătire suplimentară, dar acea bună iniţiativă a dispărut, ca multe altele.

Alexandru Mihalcu şi **Antonie Ciocan** au obţinut punctaj maxim; bravo! cu atât mai mult cu cât au fost singurii din concurs. Toţi cei şase concurenţi români au avut punctaj maxim pe primele trei probleme (ceea ce arată gradul lor relativ scăzut de dificultate). Prin urmare, tot concursul, pentru toată lumea, "a stat" în problema 4. S-au acordat 8 medalii de Aur ($40 - 36$ puncte, 7.7%), 23 medalii de Argint ($35 - 28$ puncte, 22.1%) şi 36 medalii de Bronz ($26 - 11$ puncte, 34.6%), cu toatele relativ la un total de $63 + (41) = 104$ participanţi, din $11 + (7) = 18$ echipe (17 ţări). **România** (222 puncte) a terminat pe locul I în clasamentul (neoficial) pe naţiuni, urmată de Turcia (196 puncte) şi Serbia (171 puncte). Urmează la egalitate (Franţa) şi (Kazahstan) (158 puncte), ambele dintre ţările invitate. **România** a obţinut un număr record de 5 medalii de Aur (şi una de Argint).[6]

[6] Reamintesc – toate subiectele, soluţiile oficiale şi rezultatele complete pot fi acum consultate la `http://www.massee-org.eu/index.php/mathematical/jbmo`, şi mai ales la `http://www.jbmo2014.smm.com.mk/`.

Ca de obicei, un (ultim – jur) comentariu asupra comunicatului oficial de presă de pe `http://ssmr.ro/comunicate_presa/JBMO_2014`, care conţine mai multe defecte. În calitate de document remis presei din partea asociaţiei profesionale matematice din România, ar trebui să fie fără reproş şi fără prihană – în precizia informării, ca şi în forma sa lingvistică.

• ”La jBMO au participat echipe formate din câte 6 elevi din ...” este incorect; au fost doar 3 din Muntenegru (mai departe se indică însă în mod corect că au participat doar 5 din Tadjikistan).

• Herzegovina, Azerbaijan, Kazakhstan, Tajikistan, sunt scrierea în limba engleză; în limba română se scrie predominant Herţegovina, Azerbaidjan, Kazahstan, Tadjikistan. Macedonia B nu este o ţară, ci echipa B a ţării gazdă.

• Mai aproape de casă, nu Coanda – ci Coandă, şi nu Lazar – ci Lazăr (vai, vai, diacriticele astea buclucaşe). Mai jenant este Romania în loc de România (şi asta chiar în denumirea SSMR)!

• Afirmaţia ”... pregătirea matematică de excepţie de care copiii au avut parte la şcolile de unde provin ...” continuă paşii de reconciliere cu acea instituţie bucureşteană de *ill-repute* ☺ **Salut cu mare satisfacţie însă recunoaşterea muncii excepţionale în care s-a angajat Alex Gica.**

• Omisiunea poziţiei ocupate de România la BMO 2014 (”doar” locul III) a fost ”reparată” acum prin menţionarea faptului că ”România a ocupat detaşat locul întâi cu 222 de puncte din 240 maxime” (cu amănuntul că încheierea sintagmei este oarecum neverosimilă pentru limba română; era mai potrivit posibile). Când câştigăm – păi, atunci o facem **şi** o spunem ...

3. Addendum

Andrei Eckstein îmi atrage atenţia că, relativ la **Problema 3**, putem demonstra şi că pentru $a, b, c > 0$, $abc \le 1$, avem

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \ge 4(a+b+c).$$

Într-adevăr, conform cu cele de mai sus, nu rămâne de arătat decât că $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{a}{b} \ge \sum_{cyc} a$, evident suficientă sub condiţia $abc = 1$. Acum substituţiile clasice $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{x}$ duc la $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{xy}{z^2} \ge \sum_{cyc}\frac{x}{y} = \sum_{cyc}\frac{xy}{y^2}$, care rezultă imediat din inegalitatea rearanjamentelor pentru $\{1/x^2, 1/y^2, 1/z^2\}$ şi $\{yz, zx, xy\}$ (şi aceasta indiferent de ordinea de mărime între x, y şi z).

Dar sub condiţia $abc = 1$ din problemă avem $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} = 3$, deci această inegalitate este mai tare (şi mai estetică) decât cea cerută.