COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015 FAZA JUDEŢEANĂ – ADDENDUM

Abstract. Comments on some more problems presented at the 2015 District Round of the National Mathematics Olympiad.

Se adresează tuturor claselor.
Data: 19 martie 2015.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

Cine seamănă vânt – culege furtună.

0. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Judeţene a Olimpiadei de Matematică 2015 reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la cele din materialele precedente.

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Modificarea numărului de locuri pentru Etapa Naţională

Un anunţ, făcut în fapt **după** finalizarea contestaţiilor, invocă ”o eroare de alocare”, rezultând în reducerea cu 2(doi) a numărului de locuri care revin municipiului Bucureşti pentru Etapa Naţională, pentru fiecare dintre clasele de la a VII-a la a XII-a. Nu este greu de imaginat efectul avut asupra concurenţilor care ocupau precis aceste locuri tăiate ... Inspectoratul şi Ministerul ar fi făcut mult mai bine să absoarbă eroarea, şi să permită folosirea vechilor cote, din moment ce greşeala de calcul (oare cum s-a produs ea anume?) le aparţine. Iată şi o consecinţă directă.[1]

2. Rezolvarea contestaţiilor (Bucureşti)

Dintre cele 5 contestaţii depuse la Problema 1, clasa a XII-a (o non-problemă ...), **niciuna** nu a fost acceptată. Statistic vorbind, este extrem de improbabil ca niciuna dintre acestea să nu fi avut un dram de dreptate.

La Problema 3, clasa a IX-a, situaţia este chiar dramatică. Diferenţele dintre notele de dinainte şi de după contestaţii sunt uriaşe (am mai scris acum câţiva ani despre un fenomen similar – evident precedentul nu a servit de învăţământ). Au fost acceptate 16 contestaţii, ducând la o mărire totală a notelor cu **46.5** puncte (cu un caz de la 0 la 6).

[1] `http://www.petitieonline.net/petitie/22343144/`

Se zice că soluţii care se rezumau la a exhiba valorile $a_k = (n-1)^k$ pentru $1 \leq k \leq m-1$ şi $a_m = n(n-1)^{m-1}$ nu au primit mai mult de 4 puncte din 7, deşi evident acest lucru este cu totul suficient (nu trebuie justificat cum s-a ajuns la aceste valori).

Şi la alte clase au existat (dar sporadic) măriri spectaculoase de note, cu 5 sau 6 puncte. Unele scăpări sunt mai inevitabile decât altele, şi unele sunt mai puţin scuzabile decât altele.

Să nu mă acuzaţi că ”dau din casă”! ... nu locuiesc în casa aceasta. *Alice doesn't live here anymore.*

3. PROBLEME REVIZITATE ŞI ALTE ERORI

Subiectul (1, clasa a V-a)**.** *Determinaţi toate numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$, cu $a < b$, care sunt egale cu suma numerelor naturale cel puţin egale cu a şi cel mult egale cu b.*

Soluţia oficială spune

> Dacă $a = 3$ obţinem $3 + 4 + \cdots + (b-1) + b = \overline{3b} = 30 + b$.
> Scăzând b şi adunând $1 + 2$ în ambii membri, rezultă
>
> $$1 + 2 + \cdots + (b-1) = 32,$$
>
> de unde $(b-1) \cdot b = 64$ ... (care nu convine).

Nu; rezultă $1 + 2 + \cdots + (b-1) = 33$, de unde $(b-1)b = 66$, care **din fericire** la fel nu convine.

Subiectul (1, clasa a VIII-a)**.** *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că are loc inegalitatea:*

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a-b+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

Am menţionat în comentariile mele că soluţia oficială ajunge mai întâi la inegalitatea $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$, care este chiar cunoscuta inegalitate **Nesbitt** (ne-identificată ca atare). Din păcate, aplicarea inegalităţii dintre media geometrică şi cea armonică se face prin $\displaystyle\sqrt{1 \cdot \frac{a}{-a+b+c}} \geq \frac{2}{1 + \frac{a}{-a+b+c}}$, care sigur nu dă $\dfrac{2a}{b+c}$, în loc de corecta $\displaystyle\sqrt{1 \cdot \frac{a}{-a+b+c}} \geq \frac{2}{1 + \frac{-a+b+c}{a}}$.

Mai mult, în Bucureşti şi aiurea, s-a depunctat sever faptul că această cunoscută inegalitate, **identificată ca atare de concurenţi**, nu a fost şi demonstrată la faţa locului.

O altă inegalitate bine-cunoscută [2]

$$abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

nu a fost nici ea acceptată (substituţiile **Ravi** $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, folosite în soluţia mea, duc şi aici la o soluţionare imediată, din inegalitatea mediilor AM-GM). Este vorba de inegalitatea lui **Lehmus**, sau **Padoa**, echivalentă cu inegalitatea lui **Euler** $R \geq 2r$.

Subiectul (1, clasa a X-a). *Arătaţi că pentru orice $n \geq 2$ natural, are loc inegalitatea*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \geq > \frac{n-1}{2n+2}.$$

G.M.-B.

În adiţie la comentariile mele din materialul precedent, trebuie remarcat şi că deja $\displaystyle\sum_{k=2}^{8} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} > \frac{1}{2} > \frac{n-1}{2n+2}$, deci că, numeric vorbind, problema se reducea la verificarea cazurilor $2 \leq k \leq 7$. Pe de altă parte, din inegalitatea dintre mediile geometrică şi armonică avem

$$\sqrt[2k]{(2k)!} > \frac{2k}{\sum\limits_{j=1}^{2k} 1/j} \sim \frac{2k}{\ln(2k)},$$

iar

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln^2(2k)}{4k^2} < \frac{9}{10} < 1,$$

deci într-adevăr seria $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}}$ este convergentă la o valoare subunitară.

Subiectul (3, clasa a X-a). *Determinaţi numerele complexe z pentru care are loc relaţia*

$$|z| + |z-5i| = |z-2i| + |z-3i|.$$

Problema este în esenţă bastardă; deoarece nu implică produse de numere complexe, poate fi văzută ca o relaţie vectorială, ceea ce a motivat şi soluţia mea (ca şi cea oficială).

A. Mihalcu a dat în concurs următoarea soluţie, inspirată din geometria sintetică. Simetrizând punctul de afix z faţă de cel de afix $5\mathrm{i}/2$, deci obţinând punctul de afix $w = 5\mathrm{i} - z$, relaţia se scrie în complex

$$|z-5\mathrm{i}| + |w-5\mathrm{i}| = |z| + |w| = |z-2\mathrm{i}| + |w-2\mathrm{i}| = |z-3\mathrm{i}| + |w-3\mathrm{i}|$$

ceea ce revine grafic la egalitatea perimetrelor a două paralelograme, unul conţinut în celălalt, ceea ce nu este posibil decât în cazul de degenerare.

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_triangle_inequalities#Side_lengths`

Aflu şi că un propovăduitor al inegalităţii lui **Hlawka**

$$|x+y|+|y+z|+|z+x| \leq |x|+|y|+|z|+|x+y+z|$$

vede relaţia dată drept caz de egalitate, pentru $\{x,y\} = \{-2\mathrm{i}, -3\mathrm{i}\}$. Sigur, mai rămâne să-i convingă pe corectori să accepte folosirea acestei inegalităţi, precum şi să stabilească atunci cazurile de egalitate. *À propos*, Noam Elkies dă următoarea metodă de extindere a unei inegalităţi din real în complex (unde fiecare termen este lungimea unei anume combinaţii liniare de vectori variabili), prin luarea mediei tuturor proiecţiilor; *recte*

$$|\omega| = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left|\Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\omega\right)\right| \mathrm{d}\,\theta$$

pentru $\omega \in \{x,y,z,x+y,y+z,z+x,x+y+z\}$. Metoda se poate aplica şi direct la cazul nostru, pentru $\omega \in \{z, z-2\mathrm{i}, z-3\mathrm{i}, z-5\mathrm{i}\}$. Oricum, chiar gândul la reducerea acestui **banal** rezultat la o inegalitate mult mai generală şi dificilă mă face să zâmbesc.

Subiectul (4, clasa a X-a)**.** *Fie* $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ *o funcţie neconstantă care are proprietatea*

$$f(x^y) = (f(x))^{f(y)},$$

pentru orice $x, y > 0$. *Să se arate că*

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ şi } f(x+y) = f(x)+f(y),$$

pentru orice $x, y > 0$.

Am arătat, în finalul soluţiei din materialul precedent, cum din faptul că f este multiplicativă rezultă că f este şi aditivă. Putem şi invers, din faptul că f ar fi aditivă, demonstra că f va fi şi multiplicativă. Deoarece f satisface ecuaţia **Cauchy**, vom avea $f(r) = rf(1)$ pentru orice r raţional pozitiv. Dar f este evident strict crescătoare, căci pentru $0 < x < y$ avem $f(y) = f(x+(y-x)) = f(x)+f(y-x) > f(x)$, şi de aici rezultă că pentru orice $0 < r < x < s$, cu r, s raţionale, vom avea $rf(1) < f(x) < sf(1)$, ceea ce prin trecere la limită cu $r, s \to x$ duce la $f(x) = xf(1)$. Din ecuaţia iniţială rezultă acum $f(1) = 1$, deci $f(x) = x$ pentru orice $x > 0$, ceea ce fusese deja remarcat în materialul precedent, şi este un ultim rezultat.

Se naşte întrebarea – oare demonstraţia faptului că din multiplicativitate rezultă aditivitatea (sau invers, ca mai sus) valorează ceva? În absenţa ierarhizării enunţului în două întrebări distincte, răspunsul nu este clar; înclin să cred că ar trebui aplicată o ”judecată solomonică”.

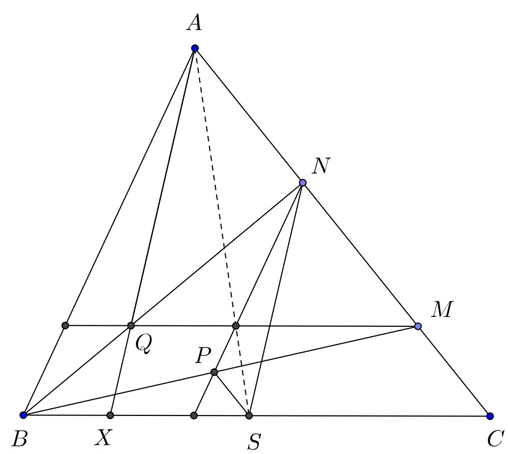
4. O Problemă nou comentată

Subiectul (3, clasa a VII-a)**.** *În triunghiul* ABC, *fie* M *mijlocul laturii* $[AC]$ *şi fie punctul* $N \in (AM)$. *Paralela prin* N *la* AB *intersectează dreapta* BM *în* P, *paralela prin* M *la* BC *intersectează dreapta* BN *în* Q, *iar paralela prin* N *la* AQ *intersectează dreapta* BC *în* S.

Demonstraţi că dreptele PS *şi* AC *sunt paralele.*

Concluzia soluţiei oficiale că ”punctele A, Q, P sunt coliniare” nu este sprijinită de niciun argument; motivul este că diagonalele unui trapez se intersectează pe mediana din vârful triunghiului obţinut prin prelungirea laturilor neparalele. Imediat apoi, se afirmă ”$\triangle ADP \equiv \triangle SDN$ (U.L.U)”. Desigur, ”L” este $DP \equiv DN$, iar unul dintre ”U” este $\angle APD \equiv \angle SND$, ca unghiuri interior alterne. Dar cel de-al doilea ”U” nu poate fi decât $\angle ADP \equiv \angle SDN$, iar acest lucru este încă necunoscut, căci nu este evident că punctele A, D, S sunt coliniare (desigur, într-o figură corect desenată, această coliniaritate se ”citeşte”, şi poate că aici s-a produs o anume derapare a soluţiei oficiale).

În concurs, unii concurenţi au rezolvat problema chiar şi **în absenţa informaţiei că punctul M este mijlocul laturii AC** (şi apoi au avut îndoieli asupra propriei lor soluţii, din moment ce nu foloseau una dintre condiţiile din enunţ). Se va vedea că atunci coliniaritatea punctelor A, Q, P nu se mai păstrează, dar cea a punctelor A, D, S rămâne validă!



Soluţie. (A. Eckstein) Fie $\{X\} = AQ \cap BC$. Atunci

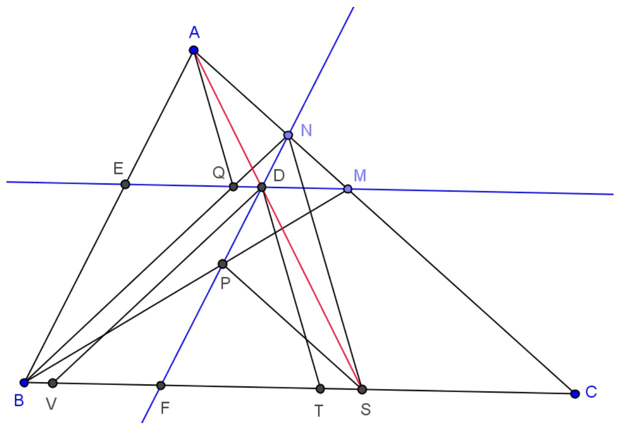
$$\frac{BS}{SC} = \frac{BS}{XS} \cdot \frac{XS}{SC} = \frac{BN}{QN} \cdot \frac{AN}{NC} = \frac{CN}{MN} \cdot \frac{AN}{NC} = \frac{AN}{NM} = \frac{BP}{PM},$$

de unde $PS \parallel MC$. Concurenţa dreptelor NP, MQ şi AS este remarcabilă, deşi aici irelevantă (în soluţia oficială, punctul de concurenţă este D, dar justificarea lipseşte). Iată demonstraţia.

Dacă notăm $\{D\} = NP \cap MQ$ şi $\{T\} = NP \cap BC$, avem

$$\frac{TS}{SC} \cdot \frac{CA}{AN} \cdot \frac{ND}{DT} = \frac{TS}{BS} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CA}{AN} \cdot \frac{ND}{DT} = \frac{SD}{AS} \cdot \frac{BP}{PM} \cdot \frac{CA}{AN} \cdot \frac{ND}{DT} = \frac{MC}{AC} \cdot \frac{AN}{NM} \cdot \frac{AC}{AN} \cdot \frac{NM}{MC} = 1,$$

deci, din reciproca **Menelaus**, punctele A, D şi S sunt coliniare. □



Soluţie. (L. Ploscaru) Fie $\{E\} = AB \cap MQ$, $\{D\} = MQ \cap NP$, în fine $\{F\} = NP \cap BC$. Construim punctele $T, V \in (BC)$ astfel încât $DT \parallel NS$ şi $DV \parallel BN$. Vrem să arătăm că punctele A, D, S sunt coliniare. Pentru aceasta, să observăm că $BFDE$ şi $BVDQ$ sunt paralelograme, de unde reiese uşor că $EQ = VF$ (deci şi $VFQE$ este paralelogram). Mai mult, $\triangle AEQ \sim \triangle DFT$, deoarece au laturile paralele în perechi, iar din teorema lui **Thales** $\dfrac{VF}{BF} = \dfrac{DF}{NF} = \dfrac{FT}{FS}$. Punând cap la cap toate aceste relaţii obţinem $\dfrac{AE}{DF} = \dfrac{EQ}{FT} = \dfrac{VF}{FT} = \dfrac{BF}{FS}$, iar folosind proporţii derivate obţinem $\dfrac{BS}{FS} = \dfrac{DF + AE}{DF} = \dfrac{AB}{DF}$. Deoarece $DF \parallel AB$, reiese că $\triangle SDF \sim \triangle SAB$, aşadar punctele A, D, S sunt coliniare. Mai departe, nu ne mai rămâne decât să observăm că $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{ED}{MD} = \dfrac{BP}{MP}$ (folosind succesiv teorema lui **Thales**), de unde – în sfârşit – se obţine că $PS \parallel AC$, conform reciprocei aceleiaşi teoreme a lui **Thales**. $\square$

De remarcat că aceste soluţii sunt chiar mai "simple" şi mai directe decât soluţia oficială, a unui caz extrem de particular. O mare slăbiciune a acestei probleme; în general informaţiile irelevante din enunţ nu fac decât să încurce, după cum se vede prea bine din chiar omisiunile soluţiei oficiale.

5. Încheiere

Lucrurile acestea trebuie zise, şi aduse în lumină. Să spunem din nou că în mare parte sunt datorate celerităţii cu care sunt compuse subiectele şi corectate lucrările? Mi-a obosit limba în gură şi am făcut cârcei la degete (şi la *mouse*). *Vox clamantis in deserto.*