Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori

JBMO 2015, Belgrad-Serbia

Abstract. Comments on the problems presented at the 2015 JBMO, 24-29 June, Belgrade-Serbia.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII, IX.
Data: 17 august 2015.
Autor: Maria-Romina Ivan, Pitești.

The show must go on!
Inside my heart is breaking,
My make-up may be flaking,
But my smile still stays on.
Whatever happens, I'll leave it all to chance.
Another heartache, another failed romance
On and on, does anybody know what we are living for?[1]

0. Introducere

Articolul prezent este în primul rând un omagiu nostalgic. Scopul nu este accentuarea acelui "gol" pe care întreaga comunitate matematică îl simte, ci evidenţierea faptului că Dan Schwarz trăieşte prin noi şi prin lecţiile (matematice şi nu numai) pe care le-a transmis "*celor mici*", ajutându-i (conştient sau nu) să devină "*mari*".

Acestea fiind spuse, după un vechi, plăcut şi binecunoscut obicei, comentariile asupra Olimpiadei Balcanice de Matematică pentru Juniori-JBMO 2015, reprezintă opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare a problemelor de concurs şi reflectă modul în care eu văd şi trăiesc matematica.[2]

[1] QUEEN https://www.youtube.com/watch?v=t99KH0TR-J4

[2] Enunţurile (în diverse limbi), soluţiile oficiale precum şi clasificarea finală pot fi accesate la http://www.dms.rs/jbmo/index.html

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile de natură personală.

1. CONŢINUT

Subiectul (1). *Determinaţi toate numerele prime a, b, c şi numerele naturale nenule k care satisfac egalitatea*

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

MOLDOVA

Soluţie. Reducem egalitatea din ipoteză modulo 3 şi avem $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod 3$. Deoarece un pătrat perfect este 0 sau 1 modulo 3, concluzionăm că două numere sunt divizibile cu trei, iar celălat nu. Cum a, b, c ne sunt date prime, înseamnă că două sunt chiar egale cu 3.

- $a = b = 3$. Atunci $16c^2 = 9k^2 + 1 - 9 - 9 \Rightarrow 9k^2 - 16c^2 = 17 \Rightarrow$

  $$(3k - 4c)(3k + 4c) = 17 \Rightarrow$$

  $$3k - 4c = 1 \text{ şi } 3k + 4c = 17.$$

  Obţinem $c = 2$ şi $k = 3$, deci soluţia $(a, b, c, k) = (3, 3, 2, 3)$.

- $c = 3$. Putem presupune $b = 3$ (cazul $a = 3$ se tratează analog).

  $$9k^2 - a^2 = 152 = 8 \cdot 19 \Rightarrow$$

  $$(3k - a) \cdot (3k + a) = 8 \cdot 19.$$

  Deoarece cele două paranteze au aceeaşi paritate, avem de analizat două cazuri:

  1. $3k - a = 2$ şi $3k + a = 76$
     Obţinem soluţia $(a, b, c, k) = (37, 3, 3, 13)$.
  2. $3k - a = 4$ şi $3k + a = 38$
     Obţinem soluţia $(a, b, c, k) = (17, 3, 3, 7)$.

Soluţiile sunt: $(3,3,2,2),(37,3,3,13),(17,3,3,7),(3,37,3,13),(3,17,3,7)$.□

Remarcă. Nivel de clasa a V-a, poate a VI-a?!? Care este ideea în selectarea unei probleme a cărei unice contribuţii este translatarea scorurilor finale cu 10 puncte? Vreau să cred că un elev care a ajuns la Balcaniada de Matematică stăpâneşte aceste tehnici (daca le pot numi astfel...) la nivel de subconştient. În orice caz, rezultatul României este mulţumitor.

Subiectul (2). *Fie a,b,c numere reale strict pozitive astfel încât $a+b+c=3$. Determinaţi valoarea minimă a expresiei*

$$A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}.$$

GRECIA

Soluţie. Expresia din enunţ se poate prelucra astfel:

$$\begin{aligned}
A&=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}\\
A&=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-(a^2+b^2+c^2)\\
A&=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+ab+ac+bc\right)-9\\
A&=\frac{2(ab+ac+bc)(1+abc)}{abc}-9.
\end{aligned}$$

Folosind binecunoscutele inegalităţi

$$1+abc\geq 2\sqrt{abc}$$

$$(ab+ac+bc)\geq\sqrt{3abc(a+b+c)},$$

obţinem $A\geq\frac{12\sqrt{abc}\cdot\sqrt{abc}}{abc}-9\Rightarrow A\geq 3$. Minimul căutat este 3 şi se atinge pentru $a=b=c=1$. □

Soluţie alternativă. Definim $f:(0,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}-x^2$. Deoarece $f''(x)=\frac{4}{x^3}-2$, funcţia este convexă pe $(0,\sqrt[3]{2}]$ şi concavă pe $[\sqrt[3]{2},3)$. Cum $a+b+c=3$, cel puţin unul dintre cele trei numere este mai mic decât $\sqrt[3]{2}$. Inegalitatea fiind simetrică în a,b,c, avem de analizat trei cazuri:

- $a,b,c\in(0,\sqrt[3]{2}]$.
  Folosind inegalitatea lui Jensen obţinem $A\geq 3f(\frac{a+b+c}{3})=3f(1)=3$.

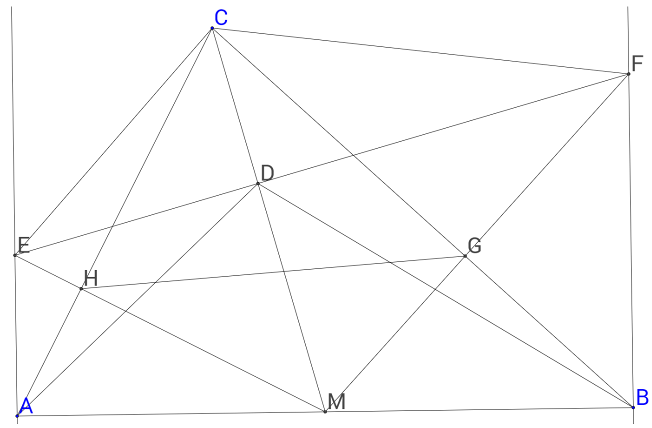
- $b, c \in (0, \sqrt[3]{2}]$, $a \geq \sqrt[3]{2}$.
  Din nou, din inegalitatea lui Jensen aplicată pentru $f(b)$ şi $f(c)$ avem $A \geq f(a) + 2f(\frac{b+c}{2}) = f(a) + 2f(\frac{3-a}{2})$. Rămâne de demonstrat că $\frac{2}{a} - a^2 + \frac{8}{3-a} - \frac{(3-a)^2}{2} \geq 3$ pentru orice $a \in (0, 3)$.
  După prelucrări succesive, ultima inegalitate este echivalentă cu $(a-1)^2(a^2 - 3a + 4) \geq 0$ (credeţi-mă pe cuvânt, am făcut toate calculele), relaţie evident adevarată pentru orice $a \in (0, 3)$.

- $b, c \in [\sqrt[3]{2}, 3)$, $b \geq c$, $a \leq \sqrt[3]{2}$.
  $(b + c - \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) \succ (b, c)$ deoarece $b + c = \sqrt[3]{2} + (b + c - \sqrt[3]{2})$, $b \geq c$, $b + c - \sqrt[3]{2} \geq \sqrt[3]{2}$ şi $b + c - \sqrt[3]{2} \geq b$.
  Aplicând inegalitatea Karamata pentru funcţia concavă f obţinem $f(b) + f(c) \geq f(b + c - \sqrt[3]{2}) + f(\sqrt[3]{2}) \Rightarrow A \geq f(a) + f(3 - a - \sqrt[3]{2})$.
  Parcurgând toate calculele plicticoase (pe care le voi lăsa cititorului), obţinem $f(a) + f(3 - a - \sqrt[3]{2}) \geq 3$ pentru $a \in (0, 1.5)$. Cum, în cazul în care ne aflăm, b şi c sunt mai mari decât 1, a este mai mic decât 1, deci inegalitatea de mai sus are loc, ceea ce implică $A \geq 3$. $\square$

Remarcă. Soluţia de mai sus are rolul de a prezenta tehnici avansate, utile în rezolvarea unor probleme mult mai dificile decât cea de la Balcaniadă, tehnici ce au un *câmp* de aplicabilitate mai larg decât clasica inegalitate a mediilor.
En fin, problema nu este prea grea pentru un elev care stăpâneşte baza în domeniul inegalităţilor şi care ştie să se *joace* convenabil cu expresiile algebrice. Simpatică problemă, potrivită pentru un concurs de juniori; nu îmi explic însă rezultatele: un singur elev român a reuşit să o rezolve complet. Mi-am amintit aproape instantaneu de Testul de Selecţie (Departajare) pentru EGMO 2014 şi de comentariul domnului Gologan despre problemele de algebră; a afirmat că pe vreme în care participa la olimpiadă, tipul acesta de probleme de algebră erau considerate *premii*. Aş îndrăzni să afirm şi eu acest lucru aici.

Subiectul (3). *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Dreptele ℓ_1 şi ℓ_2 sunt perpendiculare pe dreapta AB în punctele A, respectiv B. Perpendicularele duse din mijlocul M al segmentului $[AB]$ pe dreptele AC şi BC intersectează ℓ_1 şi ℓ_2 în punctele E şi respectiv F.*
~~Dacă D este~~ Notăm cu D punctul de intersecţie a dreptelor EF şi MC~~,~~ . ~~arătaţi~~ Arătaţi că $\angle ADB \equiv \angle EMF$.

CIPRU



Soluţie. Este suficient să arătăm că $CM \perp EF$ (datorită patrulaterelor inscriptibile ce se formează, $\angle ADB$ se calculează aproape instantaneu).

Lemă. (destul de cunoscută[3]) Fie ABCD un patrulater convex. Atunci $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Demonstraţia lemei. Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului. Folosind teorema cosinusului în triunghiurile $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$ şi $\triangle DOA$ obţinem:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 + 2AO \cdot BO \cdot \cos(\angle AOB)$$
$$CD^2 = CO^2 + DO^2 + 2CO \cdot DO \cdot \cos(\angle COD)$$
$$BC^2 = BO^2 + CO^2 + 2BO \cdot CO \cdot \cos(\angle BOC)$$
$$AD^2 = AO^2 + DO^2 + 2AO \cdot DO \cdot \cos(\angle AOD)$$

Atunci $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow$
$AO^2 + BO^2 + 2AO \cdot BO \cdot \cos(\angle AOB) + CO^2 + DO^2 + 2CO \cdot DO \cdot \cos(\angle COD) = BO^2 + CO^2 + 2BO \cdot CO \cdot \cos(\angle BOC) + AO^2 + DO^2 + 2AO \cdot DO \cdot \cos(\angle AOD) \Leftrightarrow$
$\cos(\angle AOB)(AO \cdot BO + BO \cdot CO + CO \cdot DO + DO \cdot AO) = 0 \Leftrightarrow$
$\cos(\angle AOB) = 0 \Leftrightarrow \angle AOB = 90^\circ$ □

[3]Mai multe despre poligoane ortogonale la
`http://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201202.pdf`

Folosind lema de mai sus, problema din concurs se rezumă la a verifica următoarea egalitate: $CE^2 + MF^2 = CF^2 + ME^2$. Nu este greu de sesizat că toate segmentele sunt calculabile relativ la $\triangle ABC$. Astfel,

$$\begin{aligned}
CE^2 &= AE^2 + AC^2 + 2AE \cdot AC \cdot \sin(\angle CAB)\\
MF^2 &= MB^2 + BF^2\\
CF^2 &= BC^2 + BF^2 + 2BC \cdot BF \cdot \sin(\angle CBA)\\
ME^2 &= MA^2 + AE^2
\end{aligned}$$

Concluzia problemei este echivalentă cu:

$$AC^2 + 2AE \cdot AC \cdot \sin(\angle CAB) = BC^2 + 2BC \cdot BF \cdot \sin(\angle CBA).$$

Folosind faptul că

$$AE = \frac{AB \cdot \cot(\angle CAB)}{2} \qquad BF = \frac{AB \cdot \cot(\angle CBA)}{2}$$

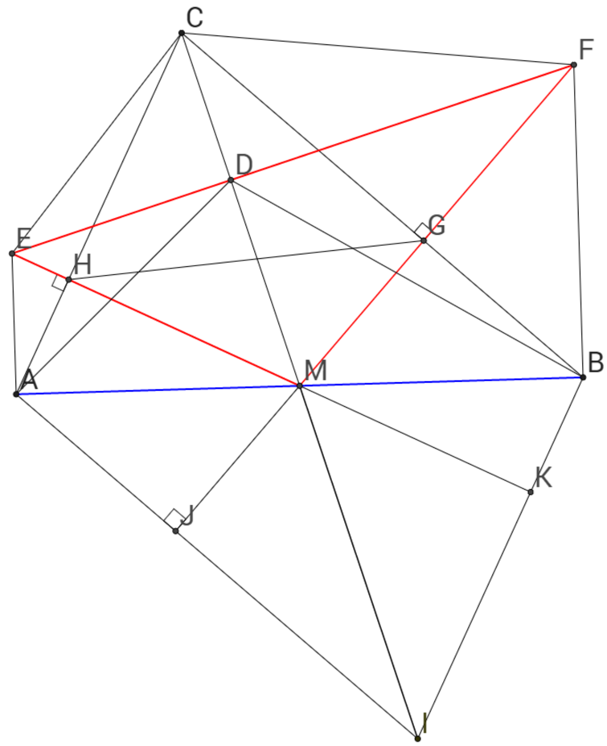
egalitatea de demonstrat se rezumă la urmatoarea relaţie, evident adevarată:

$$AC^2 + AB \cdot AC \cdot \cos(\angle CAB) = BC^2 + AB \cdot BC \cdot \cos(\angle CBA),$$

ambele expresii fiind egale cu $\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2}$. □

Soluţie alternativă[4].

[4]Soluţia este inspirată de comentariul lui ***jayme*** de pe **AoPS**:
Dear Mathlinkers,
this nice problem is based on the concept of orthopole, then on the Pappus theorem and on a converse of the Reim's theorem.
Sincerely
Jean-Louis
`http://artofproblemsolving.com/community/c6h1106922p5018856`



Ne propunem să găsim ortopolul dreptei AB faţă de triunghiul MFE. Construim paralelogramul $ACBI$ şi observăm că C, D, M, I sunt coliniare.

$$EA \perp AB, FB \perp AB, M \in AB$$

$$AI \| CB \perp MF, BI \| AC \perp ME.$$

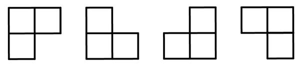
Deci, ortopolul dreptei AB relativ la $\triangle ABC$ este punctul I. Din teorema ortopolului ştim că $MI \perp EF$. □

Remarcă. Soluţia oficială arată conciclicitatea puntelor E, H, G, F unde $\{H\} = ME \cap AC$ şi $\{G\} = MF \cap BC$. O dată observat acest lucru, citind unghiurile se ajunge imediat la faptul că patrulaterul $CDHF$ este inscriptibil, de unde concluzia. Esenţială aici este intrebarea: cum exploatăm faptul că M este mijlocul lui BC? Egalitatea $MB = MC$ nu ajută foarte mult, în schimb $MB^2 = MC^2$, combinat cu perpendicularităţile din ipoteză ne conduc natural la $MH \cdot MF = MG \cdot ME$.
Luând în considerare fapul că primele doua subiecte nu s-au dovedit prea solicitante, problema de geometrie este prea uşoară pentru poziţia a treia[5],

[5]Analizând rezultatele, inegalitatea chiar s-a dovedit mai dificilă decât Problema(3). Media pe Problema(2) a fost de 2,75 puncte, iar pe Problema(3) de 4,63 puncte.

lucru confirmat de rezultatele finale (24 din cei 28 de medaliaţi cu aur şi argint au luat scor maxim pe această problemă). Pe AoPS circulă multe soluţii vectoriale şi analitice ceea ce indică *"atacabilitatea"* subiectului.[6]

Subiectul (4). *O ,,formă L" este oricare din următoarele patru piese, fiecare constând din*[7] *fiind formată din trei pătrăţele unitate:*



Se dau: o tablă 5×5*, constând din formată din 25 de pătrăţele unitate, un număr natural nenul* $k \leq 25$ *şi o colecţie nelimitată de ,,forme L".*
Doi jucători, A şi B, joacă următorul joc: începând cu A, ei marchează, alternativ, câte un pătrăţel care nu era marcat anterior, până când pe tablă sunt k *pătrăţele marcate.*
O aşezare a unor ,,forme L" pe pătrăţelele rămase nemarcate pe tablă se numeşte bună dacă fiecare piesă acoperă exact trei pătrăţele unitate nemarcate şi oricare două piese nu se suprapun.
Jucătorul B câştigă dacă orice aşezare bună a unor ,,forme L" lasă neacoperite cel puţin trei pătrăţele unitate nemarcate. Determinaţi valoarea minimă a lui k *pentru care B are strategie câştigătoare.*

CIPRU

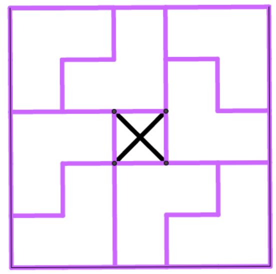
Soluţie. Vom arăta că răspunsul este $k = 4$.
Mai întâi demonstrăm că pentru $k \in \{1, 2, 3\}$, A are strategie de câştig.

- $k = 1$. A aşază prima (de fapt singura) piesă în centrul tablei. A câştigă deoarece există pavarea cu "forme L"[8] ca în figura de mai jos.

[6] http://artofproblemsolving.com/community/c6h1106922p5018856

[7] Prepoziţia adecvată verbului *a consta* este *în*, nicidecum *din*.

[8] Pentru enunţul problemei am folosit varianta românească a ghilimelelor (am citat întru totul enunţurile oficiale, deci implicit şi stilul dactilografic), dar în rest am optat pentru acest tip de ghilimele, din motive care ţin de estetică.

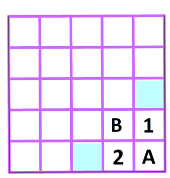


- $k = 2$. A aşază prima piesă în centrul tablei, iar B va aşeza a doua piesă în una din cele 8 "forme L" ale modelului de mai sus, anulând acoperirea acesteia. A câştigă deoarece tabla se va pava cu "forme L" exact ca mai sus, cu excepţia formei anulate de B. Asta înseamnă că pe tablă vor rămâne doar două pătrăţele neacoperite$\Rightarrow$ A câştigă.

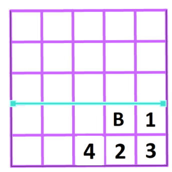
- $k = 3$. Pentru primele două mutări se pocedează analog, iar la a treia mutare, A va aşeza pătrăţica în "forma L" anulată deja de B. Tabla se va pava ca în figură, cu excepţia unei singure "forme L" căreia îi va lipsi o pătrăţică$\Rightarrow$ A câştigă.

Acum demonstrăm că pentru $k = 4$, B are strategie de câştig. Deoarece pe tablă rămân $25 - 4 = 21 \equiv 0 \pmod 3$ pătrăţele, pentru ca A să câştige, tabla trebuie să fie acoperită complet cu "figuri L".

- A pune prima pătrăţică în unul din colţurile tablei. B o va pune pe următoarea ca în figura de mai jos. Indiferent ce mutare va face acum A, cel putin unul dintre pătrăţelele 1 sau 2 va rămâne liber. Dacă 1 este liber, B va ocupa pătrăţica de deasupra lui (în cazul în care pătrăţica de deasupra era deja ocupată de A, 1 este izolat şi A pierde), iar dacă 2 este liber, B va ocupa pătrăţica din stânga lui. În ambele situaţii, cel puţin unul dintre pătrăţelele 1 sau 2 va rămâne izolat, deci imposibil de acoperit cu o "formă L"$\Rightarrow$ B câştigă.



- A nu ocupă cu prima mutare niciun colţ al tablei. Putem presupune că A pune prima piesă în jumătatea superioară a tablei, adică în primele trei rânduri (altfel întoarcem tabla). B mută ca în figura de mai jos. Dacă A nu ocupă niciunul dintre pătratele 1, 2 sau 3, atunci B ocupă pătratul 1 lăsând pătratele 2 şi 3 imposibil de acoperit cu o ”figură L”. Dacă A îl ocupă pe 3, atunci B îl va ocupa pe 4, izolându-l pe 2. Dacă A îl ocupă pe 1 (2), B îl ocupă pe 2 (1), lăsând pătratul 3 imposibil de acoperit⇒B câştigă.



În toate cazurile s-a dovedit că B are strategie de câştig⇒ $\boxed{\text{k=4}}$. □

Remarcă. Nu găsesc prea multe de menţionat...Dacă ar fi să iau în considerare gustul meu combinatoric, aş zice că problema nu spune nimic din punct de vedere conceptual; este doar un joculeţ simpatic. Pe de altă parte, o văd adecvată pentru un concurs de juniori... poate prea *subţirică* pentru Problema(4) (*încununarea Olimpiadei*).

2. Încheiere

Obişnuită cu rigurozitatea site-ului concursurilor EGMO[9], nu mă pot abtine să nu afirm că site-ul oficial sârbesc nu s-a prezentat deloc la înălţime. În primul rând lipseşte clasificarea pe ţări (deşi este considerat neoficial, toată lumea este curioasă să vadă clasamentul pe echipe şi toate ţările luptă pentru un loc fruntaş în acest clasament...). În al doilea rând, de ce lipsesc diacriticele din numele concurenţilor români? Atenţia pentru astfel de detalii este un semn veritabil de respect (pentru eveniment şi pentru persoana în sine). Mai lipsesc punctajele medii pe probleme precum şi autorii/propunătorii subiectelor (am deschis AoPS-ul cu degetele încrucişate sperând că printr-un comentariu obscur cineva a menţionat ţara propunătoare... a mers!), informaţii utile în formarea unei perspective cât mai detaliate asupra competiţiei.

[9] `https://www.egmo.org`

Acest concurs devine din ce în ce mai *plăpând* din punct de vedere matematic, deşi nu trebuie desconsiderat, fiind printre puţinele antrenamente internaţionale disponibile pentru juniori. Problemele de anul acesta au constat într-o teoria numerelor extrem de simplă, o inegalitate drăguţă, o geometrie cam *străvezie* şi o combinatorică din domeniul Teoriei Jocurilor. După cum au arătat şi rezultatele, Problema(2) şi Problema(3) trebuiau inversate.

Au participat 19 ţări[10] (dintre care 11 oficial balcanice), cu un total de 106 concurenţi (62 din ţările oficial balcanice). Rezultatele delegaţiei României la JBMO 2015 au fost, cu felicitările de rigoare!

Andrei ECKSTEIN	SSMR	Universitatea "Politehnică" Timişoara		**Leader**
Marius PERIANU	SSMR	C. N. "Ion Minulescu" Slatina		**Deputy**
Mircea FIANU	SSMR	Şc. Gim."Tudor Arghezi" Bucureşti		**Observer**
Nume	**Clasa**	**Şcoala**	**Total**	**Medalie**
Ştefan-Răzvan BĂLĂUCĂ	IX	C. N. "Mihai Eminescu" Botoşani	30	Argint
Ioan-Paul-Petru TÎRLIŞAN	VIII	Şc. Gim. "Mihai Eminescu" Bistriţa-Năsăud	24	Argint
Ioan Andrei NICOLAE	VIII	ICHB Bucureşti	28	Argint
Lenca-Iarina CUTURELA	VIII	ICHB Bucureşti	26	Argint
Alexandra TIMOFTE	VII	C. N. I. "Tudor Vianu" Bucureşti	25	Argint
Theodor-Mihai ILIANT	VIII	C. N. "Mircea cel Bătrân" Constanţa	35	**Aur**
ROMÂNIA			**168**	Locul **2**/11

Punctajul detaliat pe probleme a fost:

Nume	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	$\sum$	**Medalie**
Ştefan-Răzvan BĂLĂUCĂ	9	1	10	10	30	Argint
Ioan-Paul-Petru TÎRLIŞAN	10	2	10	2	24	Argint
Ioan Andrei NICOLAE	10	5	3	10	28	Argint
Lenca-Iarina CUTURELA	9	7	10	0	26	Argint
Alexandra TIMOFTE	10	5	0	10	25	Argint
Theodor-Mihai ILIANT	10	10	10	5	35	**Aur**
ROMÂNIA	**58**	**30**	43	**37**	**168**	Locul **2**/11

[10] De fapt 18 ţări... Serbia a participat cu doua echipe fiind ţara gazdă.

România s-a clasat pe poziţia a doua atât în clasamentul ţărilor oficial balcanice, cât şi în cel combinat, fiind depăşită de Turcia cu 9 puncte. De menţionat este că echipa noastră a obţinut cel mai mare scor din concurs pe Problema(4) (combinatorica) **! bravo !** fiind urmată **suprinzător** de Franţa**??**

S-au acordat 8 medalii de Aur (40-32 puncte), 20 de Argint (30-23 puncte), 48 de Bronz (22-12 puncte) şi 6 menţiuni de onoare. Scorul mediu a fost de 17,06/40 puncte. Pragurile medaliilor au fost ceva mai lejere comparativ cu parametrii IMO. Respectând proporţia de 1:2:3 pentru Aur:Argint:Bronz, trebuiau acordate 5-6 medalii de Aur, 10-12 de Argint şi 15-18 de Bronz (luând în considerare numai cei 62 de concurenţi din ţările oficial balcanice).

Felicitări întregii delegații a României și mai ales medaliaților! Învățăm din fiecare experiență și evoluăm constant indiferent de vârstă, tot timpul fiind loc de mai mult, de mai bine...

Na că am făcut şi clasamentul pe ţări şi mediile pe probleme!! Distraţi-vă!

Country	P1	P2	P3	P4	$\sum$
Turkey	60	39	52	26	177
Romania	58	30	43	37	168
Bulgaria	60	35	31	23	149
Serbia	57	25	48	11	141
Saudi Arabia	56	24	36	6	122
Kazakhstan	56	9	43	10	118
Greece	58	22	25	12	117
Azerbaijan	58	4	38	3	103
Republic of Moldova	60	13	19	2	94
Serbia B	51	6	31	4	92
Turkmenistan	50	7	28	0	85
France	34	2	13	30	79
Cyprus	31	12	29	0	72
Tajikistan	38	16	3	6	63
Bosnia and Herzegovina	33	15	13	1	62
FYR Macedonia	35	12	14	1	62
Albania	44	4	11	0	59
Montenegro	15	13	10	0	38
Kyrgyzstan	0	4	4	0	8
Mean Score	**8.05**	**2.75**	**4.63**	**1.62**	**17.06/40**