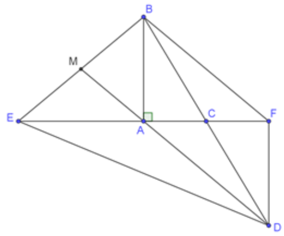
Problema 3
Etapa 1
Clasa a VII-a

Problema 3. Fie ABC un triunghi, D punctul de pe semidreapta BC astfel încât $CD = BC$ şi E punctul de pe semidreapta CA astfel încât $AE = 2 \cdot AC$. Atunci, dacă $AD = BE$, triunghiul ABC este dreptunghic.

EGMO



Soluţia 1.

Fie F punctul de pe semidreapta AC pentru care avem egalitatea $CF = AC$, atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram (întrucât diagonalele sale se înjumătăţesc) şi deci, $BF = AD = BE$.

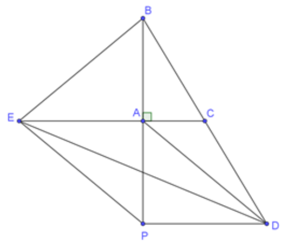
Prin urmare, triunghiul BEF este isoscel (de bază EF); dar cum BA este mediană în acest triunghi (deoarece $AE = 2 \cdot AC = AF$), rezultă că $BA \perp EF$ şi astfel triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Soluţia 2.

Deoarece EC este mediană şi $AE = 2 \cdot AC = AF$ rezultă A este centru de greutate în triunghiul BED. Atunci şi DM este mediană în acelaşi triunghi, unde M reprezintă intersecţia dintre AD şi BE.

Avem $AM = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BE}{2}$, de unde rezultă că triunghiul ABE este dreptunghic în A şi de asemenea triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Soluţia 3.



Notăm cu P simetricul lui B faţă de A. Atunci AC este linie mijlocie în triunghiul BPD iar $PD = 2 \cdot AC = AE$, în plus $PD \parallel AC$, de unde rezultă că patrulaterul $EADP$ este paralelogram cu $EP = AD = BE$. Triunghiul EBP este isoscel, iar mediana EA din vârf este şi înălţime, adică triunghiul

ABE este dreptunghic în A şi de asemenea triunghiul ABC este dreptunghic în A.