COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014
ETAPA JUDEŢEANĂ ŞI A MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

Abstract. Comments on some of the problems presented at the 2014 District Round of the Romanian National Mathematics Olympiad.

Se adresează claselor IX, X, XI, XII.
Data: 10 martie 2014.
Autor: Dan Schwarz-*Moromete*, Bucureşti.

Capul lui Moţoc vrem ...

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Etapei Judeţene şi a Municipiului Bucureşti a Olimpiadei de Matematică 2014 reflectă opinia personală a autorului.[1] Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Un Articol Defăimător

Următoarea "ştire" (din 24 februarie 2014) apare la link-ul următor
`http://www.romaniatv.net/stirea-ta-scandal-la-olimpiada-de-matematica-olimpici-internationali-depunctati-pentru-ca-stiu-prea-mult_128708.html`

(Spre deosebire de comentariile mele, care se sprijină pe fapte materiale şi o situaţie de existenţă, articolul este o exagerare fără suport şi noimă ...)

ŞTIREA TA. SCANDAL la Olimpiada de matematică.
Olimpici internaţionali, depunctaţi pentru că ştiu PREA MULT.

> Un scandal fără precedent a izbucnit la Olimpiada de Matematică din Capitală. După faza pe sector, elevi cu rezultate excelente, care au ajuns în trecut la olimpiade internaţionale, au fost eliminaţi doar pentru că au rezolvat problemele altfel decât prevedea baremul de corectare, fără ca în enunţuri să fi fost specificată o anumită metodă de rezolvare.

[1] La sugestia unui *literato* prieten al meu, care vede acest spaţiu ca fiind "poiana lui Iocan" a matematicii şcolare româneşti.

[2] Lipsesc unele probleme, la care nu am văzut interesul de a fi prezentate. Le găsiţi pe toate (postate în timp record – bravo!), ca şi rezultatele, la `http://ssmr.ro/bareme`.

> Un cititor **RomaniaTV.net** ne-a scris că scandalul este în floare la Colegiul "Tudor Vianu" din Capitală, după faza pe sector a Olimpiadei de Matematică, desfăşurată duminică 23 februarie 2014. Sute de părinţi şi copii aşteaptă să depună contestaţii la secretariat pentru că nu au fost punctaţi, deşi au obţinut rezultate corecte, prin metode diferite de rezolvare a problemelor. "Deşteptţii care se ocupă cu Olimpiada, au dat nişte probleme grele, aşa cum este normal, dar au băgat la corectat nişte profesoraşi de cartier, care habar n-au să interpreteze o teză. S-a ajuns la hilara situaţie în care, copii de internaţională să nu treacă de faza pe sector (...) pentru că au rezolvat problemele în altă manieră decât cea din baremul de corectare. Rezolvări geniale, care meritau a fi punctate cu 10, au fost evaluate cu ZERO (...). Elevii, dacă au fost corectaţi de "femeia de serviciu", au fost depunctaţi în masă, fiindcă n-au scris "ca la barem". De unde să ştie biata "femeie de serviciu" care a corectat lucrările unor olimpici abia veniţi cu aur şi argint de-afară, că aceeaşi problemă se rezolvă şi geometric, şi trigonometric şi vectorial... şi toate rezolvările sunt valabile", ne-a scris *** pe **Facebook**.

"Un scandal fără precedent" este o exagerare în negativ – din păcate au existat, după mine, scandaluri mult mai mari legate de Olimpiada de Matematică (Naţională sau Internaţională), care n-au fost tratate de loc aşa cum se cuvine. "Fără ca în enunţuri să fi fost specificată o anumită metodă de rezolvare" este o afirmaţie goală – niciodată nu este/n-ar trebui să fie specificată o metodă anume de rezolvare în enunţul problemei; nu suntem la bucătărie, unde gătim după o reţetă dată. Faptul că o soluţie corectă trebuie să primească scor maxim, indiferent de metoda evidenţiată în baremul oficial, este axiomatic. "Sute de ..." este evident o hiperbolă; n-avem noi nici măcar zeci de valori recunoscute. "Profesoraşi de cartier" nu ar trebui să fie cuvânt de ocară – marea massă a sistemului educaţional dintr-o ţară este constituită din **soldaţi fără nume**, profesori anonimi în afara locului unde îşi desfăşoară activitatea, şi care duc greul procesului de învăţământ. Este la fel de adevărat însă că cei **chemaţi** la această activitate excepţională care este Olimpiada ar trebui în primul rând să îşi exercite un dram de auto-cenzură şi să decidă singuri dacă sunt într-adevăr pregătiţi pentru cerinţele acestei activităţi, şi doar apoi să se cufunde în ea, cu întreaga responsabilitate şi dedicaţie presupuse. "Rezolvări geniale ... punctate cu 10" nu pot exista, printre altele pentru că punctajul maxim este de doar 7 puncte pe problemă, şi mai apoi pentru că **genial** este un cuvânt care trebuie utilizat cu mare circumspecţie. Iar cu "femeia de serviciu" există anecdote care anihilează şi această linie de atac! cine ştie oare unde şi-a făcut ea studiile?!? Preda Mihăilescu a lucrat (în exil) ca hamal, paznic de noapte, şi la dat zăpada ... înainte de a demonstra conjectura lui Catalan.

Fac aşadar un susţinut apel la forurile organizatoare (Inspectorate Şcolare, Ministerul Educaţiei, Comisia Naţională a Olimpiadei, SSMR) să reaşeze Olimpiada de Matematică pe o bază de completă **transparenţă** şi de sporit profesionalism.

• Numele selecţionerilor problemelor date în concurs să fie (la fel de) cunoscute, ca şi cele ale autorilor problemelor. Calitatea subiectelor date în examen ţine chiar în mai mare măsură de **alegerea** justă, şi de **verificarea** problemelor alese, din punctul de vedere al corectitudinii (atât matematice cât şi lingvistice a) enunţului şi soluţiei, şi al gradului de dificultate dorit. Desigur, *cognoscenti* sunt în mare măsură la curent cu această informaţie, dar ea trebuie făcută **publică**, aşa cum componenţa unui juriu de concurs, a unui complet de judecată, sau a unei echipe medicale de intervenţie, este cunoscută. Sunt convins că acest fapt va duce în paralel şi la o mai mare **responsabilizare** a membrilor acestor (şi celor următoare) comisii.

• Numele celor direct implicaţi în corectarea subiectelor şi, mai apoi, în rezolvarea contestaţiilor, să fie **afişate** – pe clasa şi problema în cauză, şi aceasta la toate etapele Olimpiadei, de la Locală la Finală. Aceasta nu este o lucrare de taină, ci un element de domeniu public. Liste complete cu notele după corectare, şi notele finale după contestaţii, să fie imediat disponibile. O statistică a diferenţelor evidenţiate, urmată de o analiză pertinentă, să fie făcute şi publicate. Acum un an sau doi am produs chiar eu o astfel de analiză, dar acest an sunt lipsit de datele necesare. Ştiu, prin *telefonul arab*, că au existat **discrepanţe** uriaşe, mergând până la 11 puncte (din 28), şi că numărul celor calificaţi mai departe (îndeplinind baremul de 14/28 puncte) aproape că uneori s-a dublat. Aşa că, în anume măsură, *casus belli* al articolului citat mai sus este explicabil.

• În fine, o reacţie şi o poziţie faţă de critici (ca articolul citat mai sus) trebuie să fie **asumate**. Societatea civilă are dreptul şi datoria să cenzureze, iar acţiunile ei nu trebuie ignorate sau acoperite cu o mantie de întuneric, ci răspunsuri trebuie oferite, şi, după caz, măsuri de reparare trebuie promise şi implementate. *Dixit.*

Această **transparenţă** dorită, în contrast cu ameninţările, vai, goale,[3] ale unora, nemulţumiţi de comentariile mele, care afirmă că ”altă dată vom fi mai atenţi în a distribui subiectele selectate”. Nu; nu – mai atenţi în selecţionarea problemelor şi redactarea soluţiilor – ci la cine va ajunge să le vadă! (de parcă nu sunt disponibile la sute de ochi).

Luarea de poziţie de mai sus fiind făcută, să ne concentrăm în continuare pe scopul principal al acestui material.

[3] *Empty threats are the last sanctuary of the terminally inept* – Neil Gaiman.
Niccolò Machiavelli spunea (despre Cesare Borgia) – *At one time he never said what he was going to do; now he says things which he is incapable of doing.*

3. Clasa a IX-a

Subiectul (1). *Să se determine numărul iraţional x ştiind că numerele $x^2 + x$ şi $x^3 + 2x^2$ sunt numere întregi.*

Soluţie. Putem imediat scrie $x\big((x^2 + x) - 1\big) = (x^3 + 2x^2) - (x^2 + x)$, de unde rezultă că $1 = x^2 + x = x^3 + 2x^2$ (x fiind iraţional). Prin urmare $\boxed{x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$, şi **ambele** verifică. După mine, cerinţa de determinare a numărului iraţional x este prost formulată; mai potrivită era cererea de determinare a numerelor iraţionale x ... vezi de exemplu enunţul problemei următoare, unde **funcţiile** cerute se dovedesc a fi **una** singură (dar acest lucru este în ordine, în jargonul obişnuit).

La acelaşi preţ, putem investiga şi cazul x **raţional**. Fie $x = p/q$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $\text{cmmdc}(p, q) = 1$. Condiţia $x^2 + x \in \mathbb{Z}$ se scrie $q^2 \mid p(p + q)$, care implică $q \mid p + q$, deci $q \mid p$, de unde $q = \pm 1$ şi deci $x \in \mathbb{Z}$, când evident pentru orice x **întreg** expresiile respective iau valori întregi. □

Subiectul (4). *Să se determine funcţiile $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care au proprietăţile:*

a) $f(m + n) - 1$ divide $f(m) + f(n)$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$;
b) $n^2 - f(n)$ este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Din $1^2 - f(1)$ pătrat perfect, şi $f(1) \in \mathbb{N}^*$, rezultă $f(1) = 1$. Din $f(n + 1) - 1 \mid f(n) + f(1) = f(n) + 1$ rezultă $f(n + 1) \leq f(n) + 2$, iar din $(n+1)^2 - f(n+1)$ pătrat perfect, şi $f(n+1) \in \mathbb{N}^*$, rezultă $f(n+1) \geq 2n+1$. Cu ipoteza de inducţie $f(k) = 2k - 1$ pentru $1 \leq k \leq n$, avem $f(n) = 2n - 1$ şi deci

$$2n + 1 = f(n) + 2 \geq f(n + 1) \geq 2n + 1,$$

de unde $f(n+1) = 2n+1 = 2(n+1) - 1$. Prin urmare $\boxed{f(n) = 2n - 1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Această funcţie **verifică** ambele condiţii, căci $f(m + n) - 1 = 2(m + n) - 1 - 1 \mid (2m - 1) + (2n - 1) = f(m) + f(n)$ (chiar cu egalitate), şi $n^2 - f(n) = n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2$.

De remarcat că această verificare lipseşte din soluţia oficială, iar baremul nu penalizează lipsa ei. Sunt curios ... □

4. Clasa a X-a

Subiectul (1). *Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia*

$$|z - |z + 1|| = |z + |z - 1||.$$

Soluţie. Ecuaţia dată ne spune că punctul de afix z se află pe mediatoarea segmentului determinat de punctele de afixe $|z + 1|$ şi $-|z - 1|$. Notând $z = x + \mathrm{i}y$, avem deci

$$x = \frac{\sqrt{(1 + x)^2 + y^2} - \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}{2} = \frac{2x}{\sqrt{(1 + x)^2 + y^2} + \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}.$$

O primă posibilitate este $\boxed{x = 0, \text{ cu } y \in \mathbb{R} \text{ arbitrar}}$; pentru $x \neq 0$ avem însă

$$2 = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geq |1+x| + |1-x| \geq |(1+x)+(1-x)| = 2,$$

dar egalitate se întâmplă dacă şi numai dacă $\boxed{y = 0 \text{ şi } x \in [-1,1]}$.

Această soluţie este ceva mai directă şi la obiect decât mai laborioasa soluţie oficială (desigur, ambele exploatând acelaşi fenomen). □

Subiectul (2)**.** *Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia*

$$x + \log_2\left(1 + \sqrt{\frac{5^x}{3^x + 4^x}}\right) = 4 + \log_{1/2}\left(1 + \sqrt{\frac{25^x}{7^x + 24^x}}\right).$$

Soluţie. Funcţia $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ dată prin $f(x) = \dfrac{5^x}{3^x + 4^x} = \dfrac{1}{(3/5)^x + (4/5)^x}$ este evident crescătoare; în mod similar funcţia $g\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ dată prin $g(x) = \dfrac{25^x}{7^x + 24^x} = \dfrac{1}{(7/25)^x + (24/25)^x}$ este crescătoare. Prin compuneri de funcţii crescătoare şi/sau descrescătoare, membrul stâng este crescător, iar cel drept este descrescător, deci ecuaţia are cel mult o soluţie reală.

Cum numerele au fost *grijuliu* alese astfel încât $f(2) = g(2) = 1$, reiese că $\boxed{x = 2}$ este (singura) soluţie. Se poate de altfel arăta că ecuaţia **are** întotdeauna soluţie (unică), chiar pentru numere mai puţin cumsecade, de exemplu cu π în loc de 3 ! singurul lucru care contează este ca funcţiile f şi g să fie crescătoare, cu valori ne-negative.

Nu prea înţeleg raţiunea acrobaţiilor din soluţia oficială, cu atât mai mult cu cât această metodă de mai sus face parte din meniul curent al ”trucurilor” de rezolvare a astor feluri de ecuaţii în clasa a X-a. □

Subiectul (3)**.** *Fie numerele naturale nenule p şi n, unde $p \geq 2$, şi fie numărul real a astfel încât $1 \leq a < a + n \leq p$. Să se arate că mulţimea*

$$\big\{\lfloor \log_2 x \rfloor + \lfloor \log_3 x \rfloor + \cdots + \lfloor \log_p x \rfloor \mid x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq a + n\big\}$$

are exact $n + 1$ elemente.

S-a notat prin $\lfloor x \rfloor$ partea întreagă a numărului real x.

Soluţie. O primă simplă observaţie este că pentru k natural, $k \geq 2$, dacă avem $\log_k x = m \in \mathbb{N}$, atunci $x = k^m \in \mathbb{N}$. Prin urmare $\lfloor \log_k x \rfloor = \lfloor \log_k \lfloor x \rfloor \rfloor$ pentru orice $x \geq 1$. Atunci funcţia $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ dată prin

$$f(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor + \lfloor \log_3 x \rfloor + \cdots + \lfloor \log_p x \rfloor$$

are proprietatea $f(x) = f(\lfloor x \rfloor)$. Mai mult, f este evident crescătoare, şi $f(k) \geq \lfloor \log_k k \rfloor + f(k-1) = 1 + f(k-1)$. Aceasta înseamnă că, în condiţiile problemei,

$$f([a, a+n]) = \{f(\lfloor a \rfloor), f(\lfloor a \rfloor + 1), \ldots, f(\lfloor a \rfloor + n)\},$$

şi mulţimea de care se face vorbire are exact $n + 1$ elemente.

Din nou, un enunţ supra-încărcat dă iluzia unei probleme dificile, când de fapt singurul fapt semnificativ este aproape trivial. Condiţia $p \geq 2$ nu pare necesară, căci rezultă din datele problemei, având $n, a \geq 1$ şi $p \geq a+n$; într-un anume fel este de fapt insuficientă – ar fi trebuit dat $p \geq n+1$. Iar jocul pe care îl face a creează o complicaţie cu totul artificială. □

Subiectul (4)**.** *Să se determine funcţiile $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $f(x+3f(y)) = f(x)+f(y)+2y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.*

Soluţie. Prin manipulări tipice, o astfel de funcţie f este dovedită a satisface ecuaţia Cauchy $f(x+y) = f(x)+f(y)$, deci are forma $f(x) = ax$ (fiind definită doar peste raţionale). Înlocuind în ecuaţia iniţială, se ajunge la $3a^2 = a+2$, deci la singurele valori admisibile $\boxed{a \in \{1, -2/3\}}$. □

5. CLASA A XI-A

Subiectul (1)**.** *(a) Daţi un exemplu de două matrice A şi B din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât*

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Arătaţi că, dacă A şi B sunt două matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A^2+B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, atunci ele nu comută, $AB \neq BA$.

Soluţie. a) Vezi soluţia oficială.

b) Se foloseşte rezultatul de folclor că pentru matrice reale A, B care comută avem $\det(A^2+B^2) \geq 0$ (uşor de demonstrat, factorizând $A^2+B^2 = (A+\mathrm{i}B)(\overline{A+\mathrm{i}B})$), în timp ce $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 < 0$. □

Subiectul (2)**.** *(a) Arătaţi că, dacă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie, astfel încât funcţiile $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)+f(2x)$, şi $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)+f(4x)$, sunt continue pe $\mathbb{R}$, atunci şi f este continuă pe $\mathbb{R}$.*

(b) Daţi un exemplu de funcţie discontinuă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care are următoarea proprietate: există un interval nedegenerat $I \subset \mathbb{R}$, astfel încât, oricare ar fi $a \in I$, funcţia $g_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = f(x)+f(ax)$, este continuă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. a) Din $g(2x) = f(2x)+f(4x)$ obţinem $h(x)-g(2x) = f(x)-f(2x)$, şi atunci $f(x) = \frac{1}{2}(g(x)+(h(x)-g(2x)))$, deci f este continuă.

b) După cum cel puţin unul dintre participanţi a remarcat, dacă nu se specifică faptul că intervalul I este **nedegenerat**, un exemplu este extrem de uşor de găsit; fie $I = [-1,-1]$ şi f orice funcţie impară discontinuă. După ce chestionarea intervalului I a fost supusă comisiei, şi după o prelungită considerare, s-a adus precizarea că intervalul I trebuie totuşi considerat a fi nedegenerat, ceea ce face întrebarea ne-trivială. Punctul a) ajută, în a lua în consideraţie că nu putem avea $[2,4] \subseteq I$.

Un exemplu poate fi găsit, împingând la extrem ideea de funţie impară; putem lua funcţia *signum* $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ dată prin $f(0) = 0$ şi $f(x) = x/|x|$ pentru $x \neq 0$, şi intervalul $I = (-\infty, 0)$, pentru care g_a este identic nulă pentru orice $a \in I$.

În afară de cinci scoruri mari, rezultate proaste, din cauza probabil a faptului că punctul b) este o problemă de construcţie, întotdeauna mai pretenţioasă. □

Subiectul (4). *Fie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ o funcţie strict crescătoare. Arătaţi că:*

(a) Există un şir descrescător de numere reale, strict pozitive, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergent la 0, astfel încât $y_n \leq 2y_{f(n)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

(b) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir descrescător de numere reale, convergent la 0, atunci există un şir descrescător de numere reale, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergent la 0, astfel încât $x_n \leq y_n \leq 2y_{f(n)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Desigur, punctul b) este suficient, căci luând $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ pentru $n \in \mathbb{N}$, obţinem fără alt efort suplimentar punctul a).

Din $f(0) \geq 1$ şi f strict crescătoare rezultă imediat prin simplă inducţie că $f(n) \geq n+1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$; nu că am avea neapărat nevoie de acest fapt, dar ca să spulbere incertitudinea relativă la ordinea dintre valorile n şi $f(n)$, prin asigurarea inegalităţii $n < f(n)$.

Ideea este de a construi un şir crescător $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$, cu $k_0 = 0$, astfel încât y_n să ia valoare constantă y_{k_m} pentru $k_m \leq n \leq k_{m+1} - 1$. Anume, vom lua $y_0 > x_0$, şi $y_{k_m} = (2/3)^m y_0$ pentru $m \geq 1$. Dacă şirul $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ va avea proprietatea că $x_{k_m} < (2/3)^m y_0$ şi $f(k_m) < k_{m+1}$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$, atunci

- şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător (evident), şi cu limita 0, căci subşirul $(y_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ are limita 0;
- $y_n = y_{k_m} = (2/3)^m y_0 > x_{k_m} \geq x_n$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi pentru $k_m \leq n \leq k_{m+1} - 1$, deci $x_n < y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- $f(n) < f(k_{m+1}) \leq k_{m+2} - 1$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi $k_m \leq n \leq k_{m+1} - 1$, cu $y_n = y_{k_m} = (2/3)^m y_0 < 2(2/3)^{m+1} y_0 = 2y_{k_{m+2}-1} \leq 2y_{f(k_{m+1})} \leq 2y_{f(n)}$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi pentru $k_m \leq n \leq k_{m+1} - 1$, deci $y_n < 2y_{f(n)}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Într-adevăr, putem construi un astfel de şir $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$, cu $k_0 = 0$. Dacă presupunem construit k_m, din faptul că limita şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este 0 va exista un indice $N_m > k_m$ astfel ca $x_n < (2/3)^{m+1} y_0$ pentru orice $n \geq N_m$. Este suficient atunci a lua $k_{m+1} = \max\{N_m, f(k_m) + 1\}$. Cu puţin mai multă grijă putem chiar obţine un şir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **strict** descrescător (la 0).

O problemă ciudată prin cerinţa aparent complicată; grea (doar trei-patru scoruri mari) prin simplul fapt că este o problemă de construcţie, deci de **creaţie**. Este bine să-i obişnuim pe copii cu astfel de îndeletniciri. □

6. CLASA A XII-A

Subiectul (1)**.** *Pentru* $n \in \mathbb{N}^*$ *considerăm funcţia* $f_n\colon [0,n] \to \mathbb{R}$ *dată de* $f_n(x) = \arctan\lfloor x \rfloor$*, unde* $\lfloor x \rfloor$ *reprezintă partea întreagă a numărului real* x*. Să se arate că* f_n *este integrabilă şi să se determine* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f_n(x)\,dx$*.*

Soluţie. Funcţia f_n este constantă pe intervalele $[k, k+1)$, $0 \leq k \leq n-1$, deci este integrabilă. Atunci

$$\int_0^n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f_n(k)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\arctan k,$$

şi deci din Cesàro-Stolz avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\arctan k = \lim_{n\to\infty}\arctan n = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

Funcţia $\arctan\lfloor x \rfloor$ fiind crescătoare, există şi un raţionament echivalent mai direct. Pe de o parte avem

$$\frac{1}{n}\int_0^n \arctan\lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\int_0^n \arctan n\,\mathrm{d}x = \arctan n,$$

cu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\arctan n = \frac{\pi}{2}$, iar pe de altă parte, pentru orice $0 < m < n$ întregi

$$\frac{1}{n}\int_0^n \arctan\lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{n}\int_m^n \arctan m\,\mathrm{d}x = \frac{n-m}{n}\arctan m,$$

cu $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n-m}{n}\arctan m\right) = \lim_{m\to\infty}\arctan m = \frac{\pi}{2}$. □

Soluţia oficială conţine câteva stângăcii, ca scrierea $[i, i+1]\setminus\{i+1\}$ în loc de $[i, i+1)$, şi regretabila eroare de tipar $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k-1}\int_i^{i+1} f_n(i)\,\mathrm{d}x$.

Subiectul (3)**.** *Fie* $(A, +, \cdot)$ *un inel cu proprietatea: că oricare ar fi* $x \in A$*, avem* $x + x^2 + x^3 = x^4 + x^5 + x^6$*.*

a) Să se arate că dacă $n \geq 2$ *este un număr natural,* $x \in A$ *şi* $x^n = 0$*, atunci* $x = 0$*.*

b) Să se arate că $x^4 = x$*, oricare ar fi* $x \in A$*.*

Soluţie. a) Proprietatea dată se scrie $x = x^2(x^4 + x^3 + x^2 - x - 1)$, deci şi $x^{n-1} = x^n(x^4 + x^3 + x^2 - x - 1)$, pentru orice $n \geq 2$. Rezultă prin simplă reducere, din faptul că pentru orice $n \geq 2$, dacă $x^n = 0$ atunci $x^{n-1} = 0$, că în final obţinem $x = 0$. (Acest rezultat spune că singurul element nilpotent din inelul A este $x = 0$.)

b) Proprietatea dată este scrisă acum $x(x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ (şi nu $(x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = 0$, ca în soluţia oficială). Avem atunci

$$(x^4 - x)^2 = x^2(x^3 - 1)^2 = x(x-1)\big(x(x^3 - 1)(x^2 + x + 1)\big) = 0,$$

şi deci din punctul precedent rezultă $x^4 - x = 0$. □

Subiectul (4)**.** *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup care nu are elemente de ordin* 4*, şi un morfism de grupuri* $f\colon G \to G$ *care are proprietatea* $f(x) \in \{x, x^{-1}\}$*, oricare ar fi* $x \in G$*. Să se arate că* $f(x) = x$ *oricare ar fi* $x \in G$*, sau* $f(x) = x^{-1}$ *oricare ar fi* $x \in G$*.*

Soluţie. Să presupunem prin absurd că există $g, h \in G$ cu $f(g) = g \neq g^{-1}$ şi $f(h) = h^{-1} \neq h$. Atunci $f(gh) = f(g)f(h) = gh^{-1} = (gh)^{-1}$ (nu se poate $gh^{-1} = gh$, căci duce la $h^2 = e$). Rezultă $gh = hg^{-1}$, deci şi $ghg = h$.

Avem şi $f(gh^2) = f(g)f(h)^2 = gh^{-2} = (gh^2)^{-1}$ (nu se poate $gh^{-2} = gh^2$, căci duce la $h^4 = e$). Rezultă $gh^2 = h^2g^{-1}$, deci şi $gh^2g = h^2$.

Dar atunci $gh^2g = h^2 = (ghg)^2 = ghg^2hg$, de unde $g^2 = e$, contradicţie.

Să observăm că $f(x) = x^{-1}$ (oricare ar fi $x \in G$) nu poate fi un morfism de grupuri decât dacă G este abelian, căci atunci

$$y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1} = f(xy) = f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1},$$

şi deci $xy = yx$ pentru orice $x, y \in G$. □

În mod ciudat, de data aceasta materialele clasei a XII-a au fost cele care au conţinut mai multe greşeli sau omisiuni. O scădere de nivel, compensată printr-o relativă ridicare a nivelului la majoritatea celorlalte clase.

7. Încheiere

Nu-mi rămân prea multe de spus în concluzie. O singură orhidee exotică (problema 4, clasa a XI-a); în rest multe plante de câmp, banalităţi sau idei cunoscute şi re-folosite, şi o senzaţie generală de *déjà vu*.