COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014
TESTE DE SELECŢIE JUNIORI

ABSTRACT. Comments on some of the problems asked at the Junior Selection Tests after the National Mathematical Olympiad of 2014.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII, IX.
Data: 7 iunie 2014 (revizuit 13 iunie 2014).
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. INTRODUCERE

Aceste comentarii asupra Testelor de Selecţie Juniori IV / V din 2014 reflectă opinia personală a autorului (Testele I / II / III au fost comentate într-un material precedent).[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. TEST SELECŢIE IV CĂTRE JBMO

Subiectul (1). *Numim **drăguţ** un număr natural compus n care are proprietatea că divizorii săi mai mari ca 1 pot fi scrişi pe un cerc astfel încât oricare două numere alăturate nu sunt relativ prime. Aflaţi câte numere drăguţe conţine mulţimea* $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

Soluţie. Pentru orice număr natural nenul n voi nota cu $D(n)$ mulţimea divizorilor săi pozitivi, şi cu $\gamma(n)$ oricare dintre scrierile pe cerc ale numerelor din $D(n) \setminus \{1\}$. Pentru un număr drăguţ n voi spune că o scriere $\gamma(n)$ *îl realizează drăguţ*, şi voi nota scrierea $\delta(n)$, dacă este astfel încât oricare două numere alăturate nu sunt relativ prime. Voi numi şi ***super-drăguţ*** un număr drăguţ pentru care există o scriere $\delta(n)$ astfel încât pentru oricare două numere alăturate unul divide pe celălalt, şi voi nota scrierea $\sigma(n)$. Din definiţia sa, este evident că orice număr super-drăguţ este drăguţ; voi demonstra şi reciproca – în acelaşi timp obţinând şi o caracterizare a acestor numere. Voi începe prin a face următoarele observaţii imediate

• 1 şi numerele n prime nu sunt drăguţe (căci nu sunt compuse); nici numerele de forma $n = pq$ (unde p, q sunt prime distincte) nu sunt drăguţe, căci $D(pq) \setminus \{1\} = \{p, q, pq\}$, iar p, q (coprime) vor fi alăturate pe cerc pentru orice scriere $\gamma(pq)$, deci nu există scrieri $\delta(pq)$.

[1]Lipsesc unele probleme, la care nu am văzut interesul de a fi prezentate. Le găsiţi pe toate, ca şi rezultatele, la `http://ssmr.ro/onm2014` şi `http://ssmr.ro/program_juniori`.

• Numerele de forma $n = p^\alpha$ sunt super-drăguţe, pentru orice p prim şi $\alpha \geq 2$ natural, căci avem de exemplu $\sigma(p^\alpha) = (p, p^2, \dots, p^\alpha)$ (de fapt orice scriere $\gamma(p^\alpha)$ este o scriere σ). De asemenea numerele de forma $n = pqr$ (unde p, q, r sunt prime distincte) sunt super-drăguţe, căci avem de exemplu $\sigma(pqr) = (p, pq, q, qr, r, rp) \cup pqr$, cu pqr inserat oriunde.

LEMĂ. *Dacă n este super-drăguţ, p este prim şi coprim cu n, şi α este un număr natural nenul, atunci $p^\alpha n$ este super-drăguţ.*

Demonstraţie. Fie $\sigma(n)$ o scriere care îl realizează pe n super-drăguţ, şi fie s, d divizorii lui n alăturaţi la stânga, respectiv la dreapta lui n în $\sigma(n)$. Putem considera $\sigma(n) = (n, d, \dots, s)$; fie $\overline{\sigma}(n) = (n, s, \dots, d)$ scrierea inversă a lui $\sigma(n)$. Fie $\pi_\beta(n) = p^\beta \overline{\sigma}(n) = (p^\beta n, p^\beta s, \dots, p^\beta d)$ pentru $1 \leq \beta \leq \alpha$. Dar atunci $\sigma(p^\alpha n) = (n, \pi_1(n), \pi_2(n), \dots, \pi_\alpha(n), d, \dots, s)$ este o scriere care îl realizează super-drăguţ pe $p^\alpha n$. □

Un corolar imediat este că dacă n este super-drăguţ şi m este coprim cu n, atunci mn este super-drăguţ (aplicăm lema pas cu pas, pentru puterile de prime care îl divid pe m). Din toate cele de mai sus, concluzia este că singurele numere care nu sunt super-drăguţe sunt exact cele menţionate în primul paragraf • şi am demonstrat tot ce ne-am propus.[2] □

Remarcă. Desigur, dacă ne restrângem doar la numerele drăguţe, soluţia poate fi semnificativ simplificată. Cerinţa de a afla cardinalitatea numerelor (super-)drăguţe între 1 şi 100 se reduce la o plicticoasă numărare a primelor şi produselor de câte două prime, şi ca atare ar fi trebuit să lipsească; doar caracterizarea lor ar fi fost deajuns. Aceste numere, care nu sunt (super-) drăguţe, sunt 1, cele 25 numere prime

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\},$$

şi cele 30 produse de câte două prime distincte

$$\{6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 51, 55, 57, 58, 62, 65, 69, 74, 77, 82, 85, 86, 87, 91, 93, 94, 95\},$$

în total 56 din 100, aşadar rămân $\boxed{44}$ numere (super-)drăguţe.

Subiectul (2). *Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Aflaţi cea mai mică valoare a numărului natural n pentru care este adevărată afirmaţia*

> *Dacă există n sume de forma $x_p + x_q + x_r$ $(1 \leq p < q < r \leq 5)$ egale cu 0, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.*

Soluţie. Patru triplete cu sumă nulă nu sunt deajuns; de exemplu dacă doar patru dintre numere sunt nule.[3] Cinci triplete sunt uneori suficiente;

[2] Într-o notă agreabilă şi amuzantă, am demonstrat şi că, dacă îl includem înapoi pe 1 în lista divizorilor, şi ne referim doar la proprietatea care defineşte numerele super-drăguţe, toate numerele naturale nenule vor fi astfel! căci putem lua $\sigma(1) = (1)$, $\sigma(p) = (1, p)$, $\sigma(pq) = (1, p, pq, q)$, şi insera 1 oriunde într-o scriere $\sigma(n)$ pentru celelalte cazuri.

[3] Dintr-un punct de vedere mai înalt, patru triplete cu sumă nulă nu sunt niciodată suficiente pentru a decide, căci sistemul de patru ecuaţii cu cinci necunoscute este clar compatibil (întotdeauna avem soluţia cu variabilele nule), deci este nedeterminat, conform cunoscutei teoreme Rouché-Kronecker-Capelli. Se poate ajunge la această concluzie şi în mod elementar.

de exemplu cele de indici $(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,1),(5,1,2)$ forţează $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ şi prin urmare 0. Dar nici măcar şase triplete nu sunt totdeauna deajuns; de exemplu pentru trei numere egale cu $x \neq 0$ şi două egale cu $-2x$, sau patru numere egale cu $x \neq 0$ şi unul egal cu $-2x$.

Enunţul se dovedeşte uşor ambiguu; era mai precis ca afirmaţia să fi fost

> *Dacă se ştie că n sume formate din câte trei din numerele date (dintre cele 10 sume posibile) sunt nule, atunci urmează negreşit că toate cele cinci numere sunt nule.*

Referinţa la indicii $1 \leq p < q < r \leq 5$ este cea care provoacă ambiguitatea; vezi modelul de mai sus pentru cinci triplete – care într-o interpretare greşită ar putea sugera că răspunsul este $n = 5$. Din fericire, toată lumea a înţeles cum trebuie!

Să demonstrăm că $\boxed{n = 7}$ triplete cu sumă nulă sunt suficiente pentru a decide. Ele conţin 21 de poziţii, deci un element a va aparţine la cel puţin cinci dintre ele (din principiul cutiei, care va fi aplicat în mod repetat şi în cele ce urmează). Dar elementul a nu poate aparţine la toate şapte (există doar şase perechi posibile cu elemente dintre cele patru rămase). Dacă elementul a aparţine la şase triplete, atunci celelalte poziţii vor fi ocupate de exact cele şase perechi posibile cu elemente dintre cele patru rămase, şi rezultă imediat că cele patru elemente rămase sunt egale; ultimul triplet fiind format din trei dintre ele, înseamnă că valoarea comună este 0, şi rezultă şi că $a = 0$. Dacă elementul a aparţine la cinci triplete, rămân 10 poziţii pentru patru elemente, deci un element b va aparţine la cel puţin trei dintre ele. Nu poate aparţine la patru, căci mai sunt doar trei elemente disponibile. Deci b aparţine la trei, şi avem structura $abc, abd, abe, a.., a.., ..., ...$ Rezultă $c = d = e = x$, şi apoi $a = -2x$ (din unul din tripletele $a..$), deci $b = x$ (din tripletul abc). Dar un triplet ... nu conţine pe a, deci suma lui este $3x$, ceea ce forţează $x = 0$ şi am determinat că toate elementele sunt nule.

Se pot aplica şi metode similare celor prezentate în materialul meu despre Problema 4, jBMO 2013. Considerând cantitatea (desigur, necunoscută) $\sigma = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, dacă avem şapte triplete cu sumă nulă atunci complementarele lor sunt şapte perechi cu aceeaşi sumă σ; acum putem ordona $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, considera diagrama Hasse, şi proceda în stilul prezentat acolo. □

Subiectul (3)**.** *Fie $n \geq 5$ un număr natural. Arătaţi că n este prim dacă şi numai dacă pentru orice scriere a lui n ca suma a patru numere naturale nenule $n = a + b + c + d$ are loc relaţia $ab \neq cd$.*

Soluţie. Era suficient să se dea $n \geq 2$. Cazurile $n = 2$ şi $n = 3$ verifică în mod vacuu, iar $n = 4 = 1 + 1 + 1 + 1$ este o scriere cu $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$.

1. Dacă $n \geq 2$ este compus, atunci putem scrie $n = pq$, cu $p, q \geq 2$ numere naturale, şi apoi scrie $p = s + v$ şi $q = t + u$ (cu singura condiţie $s, t, u, v \geq 1$) şi lua $a = st$, $b = uv$, $c = su$ şi $d = tv$, de unde $n = a + b + c + d$ şi $ab = cd$. Această reprezentare admite şi o reciprocă, după cum urmează.

2. Prezentăm acum o cunoscută (şi deseori utilă)

LEMĂ. *Dacă numerele naturale nenule a, b, c, d verifică $ab = cd$, vor exista numere naturale nenule s, t, u, v astfel încât $a = st$, $b = uv$, $c = su$, $d = tv$.*

Demonstraţie. Fie $s = \text{cmmdc}(a, c)$, $a = st$, $c = su$, cu $\text{cmmdc}(t, u) = 1$. Atunci $tb = ud$, deci $u \mid b$, aşadar $b = uv$; egalitatea se scrie acum $tv = d$, şi am obţinut ceea ce era de dorit. □

Dar atunci, dacă $n = a+b+c+d$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ şi $ab = cd$, vom putea scrie $n = st + uv + su + tv = (s + v)(t + u)$, şi cum $s + v, t + u \geq 2$, rezultă că n este număr compus. □

Subiectul (4)**.** *Într-un cerc se consideră două coarde $[AB]$ şi $[CD]$ care se intersectează în punctul E. Dreptele AC şi BD se taie în punctul F. Fie G proiecţia lui E pe dreapta AC. Se notează cu M mijlocul segmentului $[EF]$, cu N mijlocul segmentului $[EA]$ şi cu K mijlocul segmentului $[AD]$. Demonstraţi că punctele M, N, K, G sunt conciclice.*

Marius Bocanu

Soluţie. Discutând problema cu Laurenţiu Ploscaru, a devenit evident că instrumentală este considerarea punctului P ca mijloc al segmentului $[AF]$, ceea ce permite evidenţierea cercului (Euler) $\gamma = \odot NGPM$. Soluţia poate fi acum continuată puţin diferit decât cea oficială, considerând cercul $\odot EFD$ şi demonstrând că este omoteticul lui γ, de pol A şi raţie 2. □

3. TEST SELECŢIE V CĂTRE JBMO

Subiectul (1)**.** *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele reale pozitive $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ astfel încât*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}.$$

Arătaţi că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$, se pot alege k dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât suma lor să fie cel puţin egală cu k.

Soluţie. Este evident suficient să demonstrăm cerinţa pentru $k = n$; căci dacă suma tuturor celor n numere este cel puţin n, atunci suma celor mai mari $1 \leq k < n$ dintre ele va fi cel puţin k. Dacă introducem acum ordinea $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, cu $x_{n-k} \geq 1$ avem $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_{n+1-j} \geq \sum_{j=1}^{k} 1 = k$, iar cu $x_{n-k} \leq 1$ avem $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_{n+1-j} = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n-k} x_i \geq n - \sum_{i=1}^{n-k} 1 = n - (n-k) = k$.

Din inegalitatea Hölder rezultă însă imediat

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^3 = n^3,$$

de unde dorita $x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n$. Dacă aveţi ceva obiecţii, putem folosi în mod repetat doar Cauchy-Schwarz

$$n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)^2,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2,$$

$$n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^3 \geq \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)\right)^2 \geq \left(\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2\right)^2 = n^4,$$

cu aceeaşi concluzie. □

Remarcă. Precizarea inutilă $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ a fost oare menită doar să sugereze (în mod subtil !?!) ordonarea numerelor, pentru a conduce rapid la concluzia de mai sus? (*a patronizing crutch*).[4] Faptul că nu se permit numere egale interzice acum cazul de egalitate în Hölder, deci avem de fapt $x_1+x_2+\cdots+x_n > n$, ceea ce se repercutează în a avea inegalitate **strictă** pentru orice $1 \leq k \leq n$, şi acest lucru putea fi cerut; dar restricţia aceasta este neavenită oricum, iar în lipsa ei, rezultatul este cel mai bun posibil, dacă luăm $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

Subiectul (2)**.** *Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia*

$$5^m + n^2 = 3^p.$$

(Lucian Petrescu)

Soluţie. Modulo 4 avem $1+n^2 \equiv (-1)^p \pmod 4$, ceea ce forţează $p = 2q$ par. Atunci $5^m = (3^q - n)(3^q + n)$, deci $3^q - n = 5^a$, $3^q + n = 5^b$, pentru nişte a, b întregi cu $0 \leq a < b$ şi $a + b = m$. Dar atunci $2 \cdot 3^q = 5^a(5^{b-a} + 1)$ forţează $a = 0$, aşadar $2 \cdot 3^q = 5^m + 1$. Soluţia $q = m = 1$ se vede imediat, deci putem scrie $6(3^{q-1} - 1) = 5(5^{m-1} - 1)$. Fie în continuare $q, m > 1$.

Ordinul multiplicativ al lui 3 modulo 5 este 4, deci trebuie $4 \mid q-1$ şi atunci $2^4 \mid 3^4 - 1 \mid 3^{q-1} - 1$. Prin urmare $2^4 \mid 5^{m-1} - 1$. Ordinul multiplicativ al lui 5 modulo 2^4 este 4, deci trebuie $4 \mid m-1$ şi atunci $13 \mid 5^4 - 1 \mid 5^{m-1} - 1$. Prin urmare $13 \mid 3^{q-1} - 1$. Ordinul multiplicativ al lui 3 modulo 13 este 3, deci trebuie $3 \mid q - 1$ şi atunci (cum avem şi $4 \mid q - 1$) trebuie $7 \mid 3^6 - 1 \mid 3^{q-1} - 1$. Prin urmare $7 \mid 5^{m-1} - 1$. Ordinul multiplicativ al lui 5 modulo 7 este 6, deci trebuie $6 \mid m - 1$ şi atunci $3^2 \mid 5^6 - 1 \mid 5^{m-1} - 1$. Dar aceasta înseamnă $3^2 \mid 6(3^{q-1} - 1)$, imposibil. Prin urmare singura soluţie în numere naturale nenule este $\boxed{(m, n, p) = (1, 2, 2)}$. □

[4] Enunţul problemei este cel, **aşa cum a fost el dat**, din ziua de concurs; ordonarea numerelor a dispărut în versiunea postată pe site-ul SSMR. Prin urmare toate comentariile mele referitoare la ordonare, şi mai mult, la stricta ordonare, care interzicea egalitatea variabilelor, se referă doar la versiunea originală – dar n-a fost ea cea prezentată în concurs? şi cea cu care au avut de-a face concurenţii? aşa încât aceste comentarii rămân.

Remarcă. Metoda este arhi-cunoscută. Dacă erau permise şi valori zero, mai apărea uşor şi doar soluţia trivială $m = n = p = 0$, iar valori negative evident nu pot duce la altă soluţie suplimentară decât $(m, n, p) = (1, -2, 2)$, aşa încât se putea lăsa enunţul cu doar restricţia obişnuită pentru ecuaţii diofantice, anume de a se rezolva în numere întregi.

O coincidenţă neplăcută face ca această problemă să aibă exact enunţul Problemei 1 (propusă de **Grecia**) de la Balcaniada de Matematică din 2009, Serbia; vezi **RMC 2009**, sau cartea lui Bogdan Enescu despre Balcaniadele de Matematică, de unde voi împrumuta şi următoarea

Soluţie Alternativă. Ca în soluţia de mai sus, se ajunge (modulo 4) repede la ecuaţia $2 \cdot 3^q = 5^m + 1$, unde $p = 2q$.

Modulo 3 rezultă $(-1)^m + 1 \equiv 0 \pmod 3$, de unde m impar. Cu $q > 1$, modulo 9 rezultă şi $3 \mid m$. Atunci $5^m + 1 = (5^3)^{m/3} + 1 \equiv (-1)^{m/3} + 1 = 0 \pmod 7$, ceea ce ar implica $7 \mid 5^m + 1 = 2 \cdot 3^q$, absurd. □

Soluţie Alternativă. Ca în soluţia de mai sus, se ajunge (modulo 4) repede la ecuaţia $2 \cdot 3^q = 5^m + 1$, unde $p = 2q$. Voi folosi acum următoarea

Teoremă (ZSIGMONDY)**.** Fie $x > y \geq 1$ numere naturale coprime, şi fie $N \geq 2$ natural. Atunci $x^N + y^N$ are cel puţin un factor prim primitiv, cu excepţia cazului $2^3 + 1^3 = 9 = 3^2 = (2^1 + 1^1)^2$ (un factor prim π al lui $x^N + y^N$ se zice *primitiv* dacă $\pi \nmid x^K + y^K$ pentru orice K natural, $1 \leq K < N$).

Dar atunci, având $5 + 1 = 6 = 2 \cdot 3$, înseamnă că pentru orice $m > 1$ numărul $5^m + 1$ are un factor prim primitiv $\pi \notin \{2, 3\}$, ceea ce face egalitatea $2 \cdot 3^q = 5^m + 1$ imposibilă. □

Enunţul clasic al Teoremei lui Zsigmondy (foarte "la modă" în ultimii ani, şi după cum se vede, foarte utilă) este de fapt

Teoremă (ZSIGMONDY)**.** Fie $x > y \geq 1$ numere naturale coprime, şi fie $N \geq 2$ natural. Atunci $x^N - y^N$ are cel puţin un factor prim primitiv, cu excepţia cazurilor

- $2^6 - 1^6 = 63 = 3^2 \cdot 7$ (având $2^2 - 1^2 = 3$ şi $2^3 - 1^3 = 7$);
- $N = 2$, $x + y$ o putere a lui 2 (având $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ şi $2 \mid x - y$).

Versiunea folosită este un **corolar imediat**. Numărul $x^{2N} - y^{2N}$ are un factor prim primitiv π, cu excepţia cazului $(x, y) = (2, 1)$, $N = 3$ (celălalt caz special este imposibil, căci $2N > 2$). Atunci $x^{2N} \equiv y^{2N} \pmod \pi$, deci $(xy^{-1})^{2N} \equiv 1 \pmod \pi$ (y este inversabil modulo π, căci altfel $\pi \mid y$, forţând $\pi \mid x$, imposibil deoarece x, y sunt coprime). Din faptul că $\pi \nmid x^K - y^K$ pentru orice K natural, $1 \leq K < 2N$, rezultă $(xy^{-1})^K \not\equiv 1 \pmod \pi$ pentru orice astfel de K, deci $(xy^{-1})^N \equiv -1 \pmod \pi$ şi $(xy^{-1})^K \not\equiv -1 \pmod \pi$ pentru orice $1 \leq K < N$, adică exact ceea ce doream. ■

O variantă măcar mai originală – deşi şansele sunt ca şi aceasta să fie cunoscută – ar fi fost formularea opusă

Problemă. **Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia**
$$3^m + n^2 = 5^p.$$

Toate cele spuse mai sus se aplică, *mutatis mutandis*. Soluţii pur negative sunt doar în jurul valorii lui n, iar dacă sunt permise şi valori zero, apar uşor şi doar soluţiile triviale $3^0 + 0^2 = 5^0$ şi $3^0 + (\pm 2)^2 = 5^1$. Altfel, modulo 3 avem $n^2 \equiv (-1)^p \pmod 3$, ceea ce forţează $p = 2q$ par. Atunci $3^m = (5^q - n)(5^q + n)$, deci $5^q - n = 3^a$, $5^q + n = 3^b$, pentru nişte a, b întregi cu $0 \leq a < b$ şi $a + b = m$. Dar atunci $2 \cdot 5^q = 3^a(3^{b-a} + 1)$ forţează $a = 0$, aşadar $2 \cdot 5^q = 3^m + 1$. Soluţia $q = 1$, $m = 2$ se vede imediat, deci putem scrie $10(5^{q-1} - 1) = 3^2(3^{m-2} - 1)$, etc. sau aplica metode alternative, printre care Teorema lui Zsigmondy; vă las plăcerea de a vă antrena şi testa ...

Subiectul (3)**.** *Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC. Un diametru arbitrar intersectează laturile $[AB]$ şi $[AC]$ în punctele D, respectiv E. Dacă F şi G sunt mijloacele segmentelor $[BE]$, respectiv $[CD]$, arătaţi că $\angle FOG \equiv \angle BAC$.*

Soluţie. Până şi eu ştiu atâta geometrie sintetică încât să pot rezolva această problemă! Fie B' diametralul opus lui B şi C' diametralul opus lui C; triunghiul ABC fiind ascuţitunghic, B' se află pe arcul mic AC, iar C' se află pe arcul mic AB. Fie un punct oarecare X pe arcul mic BC. *Hexagrammum Mysticum* $ABB'XC'C$ cade sub incidenţa teoremei lui Pascal, deci punctele $O = BB' \cap CC'$, $D = AB \cap C'X$, $E = AC \cap B'X$ sunt coliniare – pe dreapta lui Pascal, care prin urmare este dreapta suport a unui diametru.

Reciproc, dacă un diametru intersectează laturile $[AB]$ şi $[AC]$ în punctele D, respectiv E, atunci dreptele $B'E$ şi $C'D$ se vor intersecta într-un punct X situat pe arcul mic BC (luăm X doar ca intersecţia dreptei $B'E$ cu cercul, şi aplicăm teorema lui Pascal; punctul $D' = AB \cap C'X$ va fi coliniar cu O, E, deci va fi intersecţia acelui diametru cu dreapta AB, aşadar coincide cu D).

Acum, OF este linie mijlocie în $\triangle BB'E$, deci $\angle BOF = \angle BB'X$, iar OG este linie mijlocie în $\triangle CC'D$, deci $\angle COG = \angle CC'X$. Dar evident $\angle BB'X + \angle CC'X = \angle BAC$ şi $\angle BOC = 2\angle BAC$, prin urmare
$$\angle FOG = \angle BOC - (\angle BOF + \angle COG) = 2\angle BAC - \angle BAC = \angle BAC,$$
şi m-am încununat de succes! □

Subiectul (4)**.** *Pe fiecare din laturile de lungime $n \geq 1$ ale unui triunghi echilateral se consideră câte $n - 1$ puncte care împart laturile în n segmente egale. Prin aceste puncte se duc paralele la laturile triunghiului, obţinându-se o reţea de triunghiuri echilaterale de latură 1. Pe fiecare dintre vârfurile triunghiurilor mici se aşază câte o monedă cu stema în sus. O mutare constă în a întoarce trei monede mutual adiacente (care se află în vârfurile unui triunghi echilateral de latură 1). Determinaţi valorile lui n pentru care este posibil ca după un anumit număr de mutări toate monedele să se afle cu stema în jos.*

Olimpiadă Columbia, 1997

Soluţie. Fie $\mathcal{T}$ mulţimea triunghiurilor echilaterale de latură 1 obţinute. Identificăm o mutare corespunzătoare vârfurilor unui triunghi $T \in \mathcal{T}$ cu id-ul T al acelui triunghi. Este clar că doar paritatea numărului de ori de care T a fost folosit contează, deci o secvenţă de mutări corespunde unei submulţimi $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ de triunghiuri folosite (o singură dată pentru orice număr impar de ori, dar niciodată pentru orice număr par de ori), căci nici ordinea mutărilor nu contează.

Evident $n = 1$ şi $n = 2$ se califică. Dacă n se califică, atunci şi $n + 3$ se califică, deoarece

• pentru n par, pe ultimul rând (de jos) al triunghiului de latură $n + 3$ alegem alternativ triunghiurile T cu vârful în sus, iar pe penultimul rând alegem alternativ triunghiurile T cu vârful în jos; pentru triunghiul format din primele n rânduri folosim pasul de inducţie;
• pentru n impar, procedăm identic, cât timp se poate – la sfârşit (în colţul dreapta-jos) însă completăm cu ultimele 3 triunghiuri rămase (astfel alegând cele 4 triunghiuri T ale unui triunghi de latură 2 care formează colţul dreapta-jos).

Prin urmare numerele $\boxed{n \not\equiv 0 \pmod 3}$ se califică. Desigur, există multe alte modele pentru a construi o secvenţă convenabilă $\mathcal{S}$ de mutări decât metoda de inducţie descrisă (dar acest lucru este irelevant). O elegantă metodă alternativă, tot inductivă de pas 3, este descrisă în soluţia oficială, şi merită a fi menţionată.

Aplicăm toate mutările pentru triunghiurile din $\mathcal{T}$. Nodurile din vârfurile triunghiului de latură n sunt afectate o dată, iar celelalte de pe laturi sunt afectate de trei ori, deci îşi schimbă poziţia stemei. Toate celelalte noduri, care formează un triunghi de latură $n - 3$, sunt afectate de şase ori, deci rămân ca mai înainte, aşadar putem aplica pasul de inducţie.

Ne rămâne să demonstrăm că numerele $n \equiv 0 \pmod 3$ nu se califică. Etichetăm nodurile reţelei, linie cu linie, începând cu 1 în vârful de sus, astfel – 1, apoi $2, 3$, apoi $3, 1, 2$, apoi $1, 2, 3, 1$, şi aşa mai departe, până la ultima linie (a $(n+1)$-a) $1, 2, 3, \ldots, 1, 2, 3, 1$ (căci $n \equiv 0 \pmod 3$). Această etichetare are proprietatea că fiecare triunghi $T \in \mathcal{T}$ are vârfurile etichetate $1, 2, 3$ într-o ordine oarecare. Fie n_i numărul nodurilor etichetate i şi care corespund monedelor cu stema în sus, pentru $1 \leq i \leq 3$. Aceste numere pot fi precis calculate pentru poziţia iniţială, anume

$$n_1 = \frac{(n+1)(n+2)+4}{6} \text{ şi } n_2 = n_3 = n_1 - 1,$$

deci n_1 şi n_2 au iniţial parităţi diferite. Dar fiecare mutare afectează câte un nod etichetat 1, 2 şi 3, deci paritatea numerelor n_i se schimbă la fiecare mutare. Prin urmare niciodată nu vor ajunge toate pare, care ar fi situaţia dacă toate monedele ajung cu stema în jos (când $n_1 = n_2 = n_3 = 0$). $\square$

4. Încheiere

Anunţul SSMR pentru perioada de pregătire şi datele Testelor IV / V păcătuieşte prin menţinerea titlului lot naţional lărgit în loc de lot naţional restrâns. Oricum, participiul trecut "lărgit" al verbului de acţiune "a lărgi" este cam ciudat, dar s-a încetăţenit astfel – pentru lotul de circa 25 ales imediat după Olimpiada Naţională; dar înainte de ultimele două Teste de Selecţie vorbim desigur de un lot "restrâns" la circa 13 (iar aici, participiul trecut este just ales şi folosit).

Enunţurile şi soluţiile oficiale au fost postate relativ târziu (de fiecare dată a doua zi după prânz, mai puţin soluţiile zilei a doua, care nu apar nici măcar pe 13 iunie). Rezultatele au devenit însă disponibile extrem de rapid, spre orele 17:30 ale zilei de 5 iunie. Felicitări tuturor celor rămaşi în cursă până în aceste faze finale, şi celor calificaţi pentru Balcaniada de Juniori (jBMO), unde le dorim cel mai mare succes!

Echipa României pentru ediţia a 18-a jBMO din Ohrid – Macedonia este [5]

Marius PERIANU		Slatina		Leader
Andrei ECKSTEIN		Timişoara		Deputy
Mircea FIANU		Bucureşti		Observer A
Cristian MANGRA		Timişoara		Observer A
Nume		**Şcoala**	**Puncte**	
Ciprian-Mircea BONCIOCAT	VIII	C.N. Tudor Vianu, Bucureşti	138	
Alexandru MIHALCU	IX	ICHB, Bucureşti	137	
Mihnea-Gabriel DOICA	VIII	ICHB, Bucureşti	121	
Alexandru PASCADI	IX	C.N. Tudor Vianu, Bucureşti	118	
Tudor PLOPEANU	VIII	ICHB, Bucureşti	117	
Antonie CIOCAN	VIII	Şcoala Nr. 56, Bucureşti	112	

[5]Toate informaţiile (participanţi, subiecte, soluţii, rezultate) vor putea în timp fi consultate la `http://www.massee-org.eu/index.php/mathematical/jbmo`, şi mai ales la `http://www.jbmo2014.smm.com.mk/`.