

Problema 3. Se consideră numărul $n = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2023}$. Aflați restul împărțirii numărului n la 100.

* * *

Soluție: A afla restul împărțirii unui număr la 100 înseamnă a determina ultimele două cifre ale numărului.

Suma care dă numărul n are 2023 de termeni.

Avem $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2800$.

Deoarece $2023 : 4 \rightarrow 505$, rest 3 vom grupa termenii lui n câte 4 lăsând de o parte primii trei termeni.

Avem

$$\begin{aligned} n &= 7 + 7^2 + 7^3 + (7^4 + 7^5 + 7^6 + 7^7) + (7^8 + 7^9 + 7^{10} + 7^{11}) + \dots + (7^{2020} + 7^{2021} + 7^{2022} + 7^{2023}) = \\ &= 7 + 7^2 + 7^3 + 7^3 \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^7 \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \dots + 7^{2019} \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = \\ &= 7 + 7^2 + 7^3 + 7^3 \cdot 2800 + 7^7 \cdot 2800 + \dots + 7^{2019} \cdot 2800. \end{aligned}$$

Termenii care conțin factorul 2800 vor avea ultimele două cifre egale cu zero, deci ultimele două cifre ale numărului n sunt date de ultimele două cifre ale lui $7 + 7^2 + 7^3$.

Cum $7 + 7^2 + 7^3 = 399$, ultimele două cifre ale lui n vor fi 99 și deci restul împărțirii lui n la 100 este 99.