Comentarii la Olimpiada de Matematică TUYMAADA 2014, Ediţia XXI – Yakutsk, Republica Sakha (Yakuţia)

Abstract. Comments on the problems of Tuymaada Mathematical Olympiad 2014, Yakutia.

Data: 14 iulie 2014, Jour de la Bastille.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

0. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii personale asupra Olimpiadei de Matematică Tuymaada 2014, Yakuţia, este opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

1. Juniori Ziua 1 (7 iulie 2014 – 4 probleme/5 ore)

Subiectul (1)**.** *Fiind date trei numere prime distincte, care este numărul maxim de numere prime (dintre acestea) care pot divide suma lor?*

A. Golovanov

Soluţie. Desigur, două dintre ele, după cum exemplele $\{p, q, r\} = \{2, 3, 5\}$ sau $\{p, q, r\} = \{3, 5, 7\}$ arată. Presupunând toate trei, atunci $pqr \mid p+q+r$, deci $pqr \leq p+q+r$, adică $\dfrac{1}{pq}+\dfrac{1}{qr}+\dfrac{1}{rp} \geq 1$. Dar evident $\min\{pq, qr, rp\} \geq 6$, deci $\dfrac{1}{pq}+\dfrac{1}{qr}+\dfrac{1}{rp} < \dfrac{1}{2}$, absurd. Mult prea uşoară. □

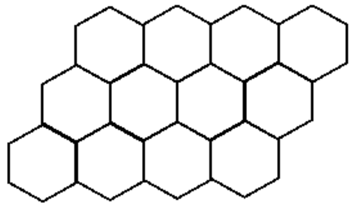
Soluţie (Oficială). Soluţia oficială este complet diferită, şi atât de "măsluită" încât refuz să o reproduc. □

Subiectul (2)**.** *Un "paralelogram" $k \times \ell$ este desenat într-o latice de celule hexagonale (consistând din k linii orizontale de câte ℓ celule fiecare; figura oferă un exemplu 3×4). În acest paralelogram este aleasă o mulţime de laturi de hexagoane, două câte două disjuncte, care partiţionează toate vârfurile în perechi (un **cuplaj perfect**, numit şi 1-**factor**). Câte laturi verticale pot fi în această mulţime?* [2]

T. Došlić

[1]Subiecte şi rezultate complete la `http://guas.info/competit/tuymaada.htm`, poate şi la `http://guas.info/competit/tuyme.htm` (versiunea limbă engleză).

[2]*Vezi Subiectul 4, Ziua 1 Seniori, dar cu o cerinţă diferită, mai dificilă.*



Soluţie (Oficială – păstrată în original). The answer is there are exactly k vertical segments in the set.

In fact, exactly one vertical segment must be chosen in every horizontal row of hexagons. To prove that, let us consider the "lower side" of the parallelogram. It contains an odd number of vertices. Therefore at least one of these vertices belongs to a chosen vertical segment. If there is more than one such vertical segment, we consider two neighbouring segments and denote them by AB and CD. Then there is an odd number of vertices on the lower side between A and C. They cannot be divided into pairs. Thus exactly one vertical side is chosen in the lower row of hexagons.

The situation is similar in all the other horizontal rows. Consider, for instance, the second row. Let CD be the vertical segment chosen in the first row. Then the fragment of the "horizontal" side of the second row of hexagons to the right of D contains an odd number of vertices. Repeating the above argument, we find that exactly one vertex of this fragment belongs to a chosen vertical segment. The proof there cannot be two chosen vertical segments in the second row follows the pattern used for the first row.[3] □

Subiectul (3)**.** *Punctele K şi L se află pe latura BC a triunghiului ABC, astfel încât $\angle BAK = \angle CAL = 90°$. Demonstraţi că mijlocul înălţimii din A, mijlocul lui KL şi centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ sunt coliniare.*

A. Akopyan, S. Boev, P. Kozhevnikov

Soluţie. (AoPS) Let O be the circumcentre of ABC, O' be the circumcentre of AKL, D be $AO \cap BC$. Let $AO \cap \odot AKL = A'$. Notice $\angle LKA' = \angle ABC$, therefore $KA' \parallel AB$, and similarly $LA' \parallel AC$; thus a homothety with respect to D takes $A'KL \mapsto ABC$. So it is the internal centre of similitude, i.e. the cross-ratio $(A, D, O, O') = -1$. If M is the midpoint of KL, then $(MA, MD, MO, MO') \cap AH$ yields the conclusion. Just for the sake of completeness, A is the external centre of similitude as AKL, ABC have the same angle bisectors at A, so the isogonal of the common altitude means A, O, O' are collinear. □

Subiectul (4)**.** *Numerele reale pozitive a, b, c satisfac $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 3$. Demonstraţi inegalitatea*

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+1}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

N. Alexandrov

[3] Notice one consequence of the above argument. Suppose the vertical segments of each horizontal row are numbered from left to right. Then the numbers of the chosen vertical segments form a non-decreasing sequence (if listed from below). Această observaţie este necesară pentru problema Seniori.

Soluţie. (AoPS) It is enough to be given $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leq 3$. By AM-GM we get $a^3+1 \geq 2a^{3/2}$. Then our inequality is given by

$$\sum \frac{1}{\sqrt{a^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \left(\frac{1}{a}\right)^{3/4} \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sum \frac{1}{a}}{3}\right)^{3/4} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

(last one follows from the Power Mean inequality); equality is for $a=b=c=1$. $\square$

Soluţii (Oficiale). 1. Din inegalitatea Cauchy-Schwarz avem

$$\left(\sum \frac{1}{\sqrt{a^3+1}}\right)^2 \leq \left(\sum \frac{1}{a+1}\right)\left(\sum \frac{1}{a^2-a+1}\right).$$

Apoi, aplicând $\dfrac{1}{x^2-x+1} \leq \dfrac{1}{x}$ şi $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{\frac{1}{x}+1}{4}$ pentru $x \in \{a,b,c\}$ $(x>0)$, obţinem

$$\left(\sum \frac{1}{a+1}\right)\left(\sum \frac{1}{a^2-a+1}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\sum \frac{1}{a}+3\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right) = \frac{9}{2}.$$

2. Avem $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leq \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{x}+1\right)$ pentru $x \in \{a,b,c\}$ $(x>0)$, căci revine la $(x-1)^2(9x^3+24x^2+8x+1) \geq 0$. Prin adunarea relaţiilor se obţine inegalitatea cerută. $\square$

2. Juniori Ziua 2 (8 iulie 2013 – 4 probleme/5 ore)

Subiectul (5). *Pentru trinoamele pătratice $P(x)$ şi $Q(x)$ există o funcţie liniară $\ell(x)$ astfel încât $P(x) = Q(\ell(x))$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Câte astfel de funcţii liniare $\ell(x)$ pot exista?*

A. Golovanov

Soluţie. Evident o funcţie liniară $\ell(x) = ax+b$ (cu $a \neq 0$) admite o inversă (tot liniară) $\ell^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}$. Atunci, dacă $P(x) = Q(\ell_1(x)) = Q(\ell_2(x))$, vom avea şi $Q(x) = Q(\lambda(x))$, unde $\lambda = \ell_2 \circ \ell_1^{-1}$ este liniară, deci $\lambda(x) = \alpha x + \beta$ (cu $\alpha \neq 0$).

Prin identificarea coeficienţilor dominanţi rezultă $|\alpha| = 1$.[4] În continuare vom presupune coeficienţii reali.

Lucrând în general cu $\deg Q = n \geq 2$, atunci pentru n impar vom avea $\alpha = 1$, şi ajungem la $Q(x) = Q(x+\beta)$, deci prin simplă iterare la $Q(x) = Q(x+k\beta)$ pentru orice k natural; aceasta forţează evident $\beta = 0$, pentru care $\lambda = \mathrm{id}$. Pentru n par putem avea şi $\alpha = -1$, când ajungem la $Q(x) = Q(-x+\beta)$, deci la $\lambda \circ \lambda = \mathrm{id}$. Dar nu putem avea şi $Q(x) = Q(-x+\gamma)$, pentru $\gamma \neq \beta$, căci atunci $Q(-x+\beta) = Q(-x+\gamma)$, deci $Q(x) = Q(x+(\beta-\gamma))$, cu o contradicţie evidenţiată mai sus. Rezultă că în acest caz pot exista cel mult $\boxed{\text{două}}$ astfel de funcţii λ, şi un exemplu imediat este cel unde Q este format doar din monoame de grad par, când $\lambda = \pm\,\mathrm{id}$ funcţionează.

La noi $\deg Q = 2$, ceea ce permite o soluţie mult mai simplă şi directă, bazată pe simetriile graficului funţiei de gradul doi (care este şi soluţia oficială). $\square$

Remarcă. Am început să mă cam obişnuiesc cu aceste probleme de polinoame ale lui A. Golovanov; este ignorat cu totul corpul coeficienţilor (care după cum se vede, în anumite condiţii poate juca un rol instrumental), şi particularizări banale sunt folosite – când soluţia generală este doar puţin mai sofisticată, dar mult mai relevantă.

[4] Atunci, pentru $\deg Q = n \geq 2$, şi lucrând cu coeficienţi complecşi, putem avea chiar n astfel de funcţii λ, de exemplu $\lambda_k(x) = \mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/n}x$ pentru $Q(x) = x^n$.

Subiectul (6)**.** *Raza cercului ω_A cu centrul în vârful A al triunghiului ABC este egală cu raza cercului exînscris tangent laturii BC. Cercurile ω_B şi ω_C sunt definite în mod similar. Demonstraţi că dacă două dintre aceste cercuri sunt tangente, atunci oricare două dintre ele sunt tangente.*

L. EMELYANOV

Soluţie. (AoPS – Ciprian Bonciocat) Let us say that ω_b is tangent to ω_c. We distinguish two cases.

1) $r_b + r_c = a$. In this case, we apply the formulæ for r_b and r_c; $(p-c)\cot\frac{\alpha}{2} + (p-b)\cot\frac{\alpha}{2} = a \Leftrightarrow (2p-b-c)\cot\frac{\alpha}{2} = a \Leftrightarrow a\cot\frac{\alpha}{2} = a \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{2}}$. Now, to show that $r_a - r_b = c \Leftrightarrow (p-b)\cot\frac{\gamma}{2} - (p-a)\cot\frac{\gamma}{2} = c \Leftrightarrow (a-b)\cot\frac{\gamma}{2} = c$. Now, we use the identity $\cot\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x}$: $(a-b)\cot\frac{\gamma}{2} = c \Leftrightarrow (a-b)\frac{\frac{c}{a}}{1-\frac{b}{a}} = c$, which is obviously true. Hence, $r_a - r_b = c$, i.e. ω_a and ω_b are tangent. In a similar manner, it can also be shown that ω_a and ω_c are tangent.

2) $r_b - r_c = a$. This case is done similarily to the first, except that we reverse the steps of the proof. $r_b - r_c = a \Leftrightarrow p\tan\frac{\beta}{2} - (p-a)\cot\frac{\beta}{2} = a \Leftrightarrow p\tan^2\frac{\beta}{2} - (p-a) = a\tan\frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \left(\tan\frac{\beta}{2} - 1\right)\left(p\tan\frac{\beta}{2} + p - a\right) = 0$. If the left part is zero, it means that $\tan\frac{\beta}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = \dfrac{\pi}{2}}$. If the right part cancels, we obtain a contradiction, since $\tan\frac{\beta}{2} \geq 0$, and $\frac{a-p}{p} < 0$. From now, the solution is straightforward; $\beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow b\cot\frac{\beta}{2} = b \Leftrightarrow (2p-a-c)\cot\frac{\beta}{2} = b \Leftrightarrow (p-a)\cot\frac{\beta}{2} + (p-c)\cot\frac{\beta}{2} = b \Leftrightarrow r_c + r_a = b$, namely that ω_c and ω_a are tangent. In the same way, it can be shown that ω_a and ω_b are also tangent. □

Subiectul (7)**.** *Fiind date n pătrate negre şi n pătrate albe în plan, fiecare poate fi obţinut din oricare altul printr-o translaţie. Oricare două pătrate de culori diferite au un punct comun. Demonstraţi că există un punct comun la cel puţin n pătrate.*

V. DOLNIKOV

Soluţie. Studiem proprietăţile mulţimii proiecţiilor pătratelor, pe direcţii paralele cu laturile lor. Fie una din aceste direcţii, şi cele $n+n$ segmente egale date de proiecţiile pătratelor albe şi negre. Dacă segmentele extreme sunt de culori diferite, atunci trebuie să aibă (măcar) un punct în comun, care deci va aparţine **fiecărui** segment. Dacă segmentele extreme sunt de aceeaşi culoare c, atunci segmentele de cealaltă culoare $\bar{c}$ le intersectează pe ambele, şi mai mult, unul din capetele lor va aparţine la cel puţin $\dfrac{3}{2}n$ segmente (cele n de culoare $\bar{c}$ şi măcar jumătate din cele n de culoare c). În concluzie, în ambele cazuri va exista un punct acoperit de cel puţin $\dfrac{3}{2}n$ proiecţii.

Dar atunci, perpendicularele în acele puncte comune se vor intersecta într-un punct comun la cel puţin n pătrate – notând cu H, respectiv V, mulţimea pătratelor intersectate de perpendiculara verticală, respectiv orizontală, va rezulta din PIE (principiul includerii/excluderii)

$$|H \cap V| = |H| + |V| - |H \cup V| \geq \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}n - 2n = n.$$

(Măcar şi pentru $n = 2$, marginea n este cea mai bună, cu un simplu model). □

Remarcă. Ideea de a lucra pe direcţiile (perpendiculare) ale laturilor este destul de bine cunoscută. Problema 5, OIM 1992 (oareşicum în aceeaşi ordine de idei), suna astfel

> Let S be a finite set of points in the three-dimensional space. Let S_x, S_y, S_z be the sets consisting of the orthogonal projections of the points of S onto the yz-plane, zx-plane, xy-plane, respectively. Prove that
> $$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|,$$
> where $|A|$ denotes the number of elements in the finite set A.

În general, în dimensiune d inegalitatea se scrie $|S|^{d-1} \leq \prod_{k=1}^{d} |S_k|$.

Subiectul (8)**.** *Pe malul stâng al fluviului Lena se află m sate; alte n sate se află pe malul drept, iar un alt sat se află pe o insulă. Se dă că* $\mathrm{c.m.m.d.c.}(m+1, n+1) > 1$*. Între oricare două sate separate de ape operează un bac, care poartă un număr întreg. Locuitorii fiecărui sat susţin că bacurile care operează în satul lor poartă numere diferite, şi că mai mult, aceste numere formează un segment contiguu al seriei numerelor întregi. Demonstraţi că cel puţin unii dintre ei se înşeală.*

K. Kokhas

Soluţie. În limbaj de Teoria Grafurilor avem un graf bipartit complet $G = K_{m,n}$ cu $V(G) = S \cup D$, $S \cap D = \emptyset$, $|S| = m$, $|D| = n$, augmentat cu un ultim vârf ω conectat la toate celelalte. Muchiile poartă etichete din $\mathbb{Z}$, iar afirmaţia de combătut este că etichetele muchiilor incidente oricărui vârf sunt distincte, şi formează un segment contiguu în $\mathbb{Z}$. Vom nota această mulţime de etichete pentru un vârf v cu $E(v)$.

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că etichetele muchiilor incidente în ω sunt $E(\omega) = \{1, 2, \ldots, m+n\}$. Fie $1 < d = \mathrm{c.m.m.d.c.}(m+1, n+1)$. Notăm cu $D(v)$ mulţimea etichetelor din $E(v)$ care sunt divizibile cu d.

Avem evident $|D(v)| = \dfrac{n+1}{d}$ pentru $v \in S$, $|D(v)| = \dfrac{m+1}{d}$ pentru $v \in D$, şi $|D(\omega)| = \left\lfloor \dfrac{m+n}{d} \right\rfloor = \dfrac{m+1}{d} + \dfrac{n+1}{d} - 1$ (aici intervine $d > 1$). Atunci

$$\sum_{v \in V(G) \cup \{\omega\}} |D(v)| = \sum_{v \in S} |D(v)| + \sum_{v \in D} |D(v)| + |D(\omega)| = 2\frac{(m+1)(n+1)}{d} - 1,$$

dar pe de altă parte fiecare muchie este numărată de două ori, deci valoarea de mai sus trebuie a fi număr par, contradicţie. $\square$

Remarcă. Sub limbajul stufos, un simplu argument de paritate, bazat pe cele mai simple relaţii dintre gradele şi numărul muchiilor unui graf.

3. Seniori Ziua 1 (7 iulie 2014 – 4 probleme/5 ore)

Subiectul (1)**.** *Patru numere consecutive de 3 cifre sunt împărţite, respectiv, la patru numere consecutive de 2 cifre. Care este numărul minim de resturi diferite care se pot obţine?*

A Golovanov

Soluţie. (AoPS) We claim the minimum number of remainders is $\boxed{\text{one}}$.

Let the four three-digit numbers be $x, x+1, x+2, x+3$ and the moduli be $a, a+1, a+2, a+3$, with the common remainder r. Then we have $x+i \equiv r \pmod{a+i}$ for $i = 0, 1, 2, 3$, rewritable as $x-r-a \equiv 0 \pmod{a+i}$. Put $y = x-r-a$, then $a+i \mid y$ for $i = 0, 1, 2, 3$. Notice that $a, a+1$ and $a+2, a+3$ are relatively prime, so this implies $a(a+1) \mid y$ and $(a+2)(a+3) \mid y$. Here $\gcd(a, (a+2)(a+3)) \mid 6$ and $\gcd(a+1, (a+2)(a+3)) \mid 2$, meaning that $\gcd(a(a+1), (a+2)(a+3)) \mid 12$. We therefore get $\operatorname{lcm}[a(a+1), (a+2)(a+3)] \mid y$, hence if $y \neq 0$ then

$$|y| \geq \operatorname{lcm}[a(a+1), (a+2)(a+3)] \geq \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{12} \geq \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{12} > 1000,$$

where $x \geq y = x-a-r$, so if $y > 0$ then this contradicts x having only three digits, and if $y < 0$ then as $a + r < 2a < 200$, we find $x < 0$. Therefore $y = 0$ and $x = a+r$. Thus all solutions are given by $x = a+r$, where $r < a < 100$ is arbitrary, with $r + a \geq 100$.

The simplest example is $100, 101, 102, 103$ divided respectively by $51, 52, 53, 54$, yielding remainder 49. De observat că este suficient de "ghicit" răspunsul şi exhibat un exemplu; nicăieri nu suntem obligaţi să argumentăm cum a fost el găsit. □

Remarcă. Soluţia oficială este greşită, susţinând că se obţin cel puţin **două** resturi. Un membru al Juriului îmi comunică faptul că era de fapt intenţionat să se ceară ca acele numere de 3 cifre să fie şi mai mari decât 200 (de unde posibil şi probabil eroarea din soluţie). Corectarea s-a făcut cu răspunsul corect, comisia de coordonare acceptând soluţiile (corecte) cu răspunsul cel bun, şi niciun concurent n-a fost dezavantajat – dimpotrivă, având de rezolvat o problemă (mult) mai simplă.

Subiectul (2)**.** *Vezi Subiectul 3, Ziua 1 Juniori.*

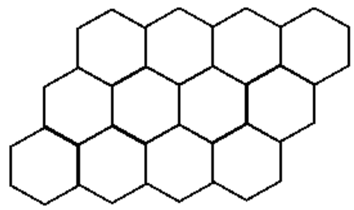
A. Akopyan, S. Boev, P. Kozhevnikov

Subiectul (3)**.** *Vezi Subiectul 4, Ziua 1 Juniori.*

N. Alexandrov

Subiectul (4)**.** *Un "paralelogram" $k \times \ell$ este "desenat" într-o latice hexagonală (consistând din k linii orizontale de câte ℓ celule fiecare; figura oferă un exemplu 3×4). În acest paralelogram este aleasă o mulţime de laturi de hexagoane, două câte două disjuncte, care partiţionează toate vârfurile în perechi (un* ***cuplaj perfect****, numit şi 1-****factor****). În câte feluri se poate face aceasta?* [5]

T. Došlić



[5] *Vezi Subiectul 2, Ziua 1 Juniori, dar cu o cerinţă diferită, mai facilă.*

Soluţie (Oficială – păstrată în original). The answer is this can be done in $\binom{k+\ell}{k}$ ways.

First solution. We assign numbers from 1 to $k+1$ to the vertical sides in each horizontal row, starting from the left.

Lemma. There is exactly one chosen vertical segment in each horizontal row. The numbers of the chosen vertical segments form a nondecreasing sequence (when the segments are listed from below).

Proof. The proof is given in the solution of Problem 2, Junior League. ■

We note now that every non-decreasing sequence of ℓ numbers between 1 and $k+1$ defines the choice of all the segments uniquely (then the number $\binom{k+\ell}{k}$ of such sequences is the answer to the problem). Indeed, the "lower side" of the parallelogram contains an odd number of vertices; one of the vertices belongs to a vertical segment, and even numbers of vertices remain to the left and to the right of it. These vertices are divided into pairs in only one way. The same is true for the "upper side", and in-between the situation is not entirely dissimilar.

Second solution. We start the construction of the desired set with choosing one of two segments containing the point A. Then we choose the segments along the sides of the parallelogram; their position is uniquely defined by the choice of the segment containing A. The vertices that do not belong to any of the segments already chosen in both cases form a smaller parallelogram. This precisely corresponds to the relation $\binom{k+\ell}{k} = \binom{k+\ell-1}{k-1} + \binom{k+\ell-1}{\ell-1}$ for binomial coefficients. The reader will easily check that for $k=1$ and $\ell=1$ the number of choices is $k+1$ and $\ell+1$ respectively. This means that the edge conditions in the relation of above are the same as in the Pascal triangle; therefore the desired number is the binomial coefficient $\binom{k+\ell}{k}$. □

4. Seniori Ziua 2 (8 iulie 2014 – 4 probleme/5 ore)

Subiectul (5). *Numere întregi strict pozitive sunt scrise (câte unul) pe un număr par de cartonaşe. Fie a_k numărul cartonaşelor pe care este scrisă valoarea k. Este dat că*

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots \geq 0$$

pentru orice natural nenul n. Demonstraţi că aceste cartonaşe pot fi împerechiate astfel încât numerele din fiecare pereche să difere prin 1.

A. Golovanov

Soluţie. Să notăm $s_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots$, aşadar $s_{n+1} = a_{n+1} - s_n$. Fie $m \geq 1$ cel mai mic număr scris pe vreun cartonaş, deci $a_m > 0$, dar $a_n = 0$ pentru orice $0 \leq n < m$, aşadar $s_n = 0$ pentru orice $0 \leq n < m$ şi $s_m = a_m > 0$. Atunci $a_{m+1} - a_m = a_{m+1} - s_m = s_{m+1} \geq 0$, apoi, $a_{m+2} - (a_{m+1} - a_m) = a_{m+2} - s_{m+1} = s_{m+2} \geq 0$, etc.

Fie $M \geq m$ cel mai mare număr scris pe vreun cartonaş, deci $a_M > 0$, dar $a_n = 0$ pentru orice $n > M$. Atunci $0 \leq s_{M+1} = a_{M+1} - s_M = -s_M$ forţează $0 \leq s_M \leq 0$, adică $a_M - (a_{M-1} - a_{M-2} + \cdots + (-1)^{M-m+1} a_m) = a_M - s_{M-1} = s_M = 0$.

Înseamnă că putem împerechia s_m cartonaşe cu număr m cu tot atâtea cu număr $m+1$, apoi s_{m+1} cartonaşe cu număr $m+1$ cu tot atâtea cu număr $m+2$, etc., până la s_{M-1} cartonaşe cu număr $M-1$ cu tot atâtea cu număr M, şi totul se încheie cu bine. □

Soluţie (Oficială). Soluţia oficială procedează prin simplă inducţie după numărul de cartonaşe, dar instrumentală se dovedeşte tot considerarea celui mai mic număr m scris pe vreun cartonaş, care permite pasul de inducţie. Atunci $a_m > 0$, dar $a_n = 0$ pentru orice $0 \leq n < m$. Având şi $a_{m+1} - a_m \geq 0$, putem elimina câte un cartonaş cu numărul m, respectiv $m + 1$, şi utiliza pasul de inducţie (căci noul sistem de cartonaşe verifică toate condiţiile problemei). $\square$

Remarcă. Se poate face remarca imediată asupra inutilităţii condiţiei ca numărul de cartonaşe să fie par; el **rezultă** par din condiţiile date.

Subiectul (6). *Vezi Subiectul 7, Ziua 2 Juniori.*

V. DOLNIKOV

Subiectul (7). *Fie paralelogramul $ABCD$. Cercul exînscris triunghiului ABC este tangent laturii AB în L şi prelungirii laturii BC în K. Dreapta DK intersectează diagonala AC în punctul X; dreapta BX intersectează mediana CC_1 a triunghiului ABC în Y. Demonstraţi că dreapta YL, mediana BB_1 a triunghiului ABC şi bisectoarea sa CC' sunt concurente.*

A. GOLOVANOV

Soluţie. (AoPS – Luis González) Denote $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ $(b > a)$. Let CC', CC_1, CL cut AD at E, F, G, respectively. Clearly $AE = b$ and $AF = a$ implies $FE = b - a$, and $\triangle LBC \sim \triangle LAG$ gives $\dfrac{GA}{a} = \dfrac{s-b}{s-a}$, implying $FG = a - a \cdot \dfrac{s-b}{s-a} = \dfrac{a(b-a)}{s-a}$, implying $\dfrac{FE}{FG} = (b-a) \cdot \dfrac{s-a}{a(b-a)} = \dfrac{s-a}{a} = \dfrac{BK}{BC}$. This in turn implies $D(C, B, K, A) = C(G, F, E, B)$, so $D(C, B_1, X, A) = B(C, B_1, X, A) = C(B, C', C_1, L)$, therefore $CC' \cap BB_1$, $Y \equiv BX \cap CC_1$ and L are collinear, i.e. YL, BB_1 and CC' concur. $\square$

Soluţie. (AoPS – Ciprian Bonciocat) We will solve the problem using barycentric coordinates. We have $A = (1, 0, 0)$; $B = (0, 1, 0)$; $C = (0, 0, 1)$. Since $ABCD$ is a parallelogram, we get

$$D = A + C - B = (1, -1, 1)$$

Because $BK = BL = p - a$, we have

$$K = (0 : p : a - p) L = (p - a : p - b : 0)$$

In order to find out the coordinates of X, we have to deduce the equation of the line DK:

$$D \in DK \Rightarrow u - v + w = 0 \ (1) K \in DK \Rightarrow vp + w(a - p) = 0 \ (2)$$

From (1) and (2) the equation follows

$$ax + (a - p)y - pz = 0$$

Now, since the equation of the AC is obviously $y = 0$, the coordinates of X are

$$X = (p : 0 : a)$$

Looking for the coordinates of Y, we write the equations of the lines XB and CC_1

$$XB : \frac{x}{z} = \frac{p}{a} \ (3) CC_1 : x = y \ (4)$$

From (3) and (4), we obtain the coordinates of Y:

$$Y = (p : p : a)$$

Let $\{T\} = \text{bis } (\angle ACB) \cap BB_1$. We must show that $T \in LY$. Since the equation of bis $(\angle ACB)$ is $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, and the equation of BB_1 is $x = z$, we get that $T = (a : b : a)$.

In order to find out the equation of LY, we must solve the system

$$Y \in LY \Rightarrow up + vp + wa\ (5) L \in LY \Rightarrow u(p-a) + v(p-b) = 0\ (6)$$

After some computations, one can find

$$LY : a(p-b)x + a(a-p)y + p(b-a)z = 0$$

Plugging in the coordinates of T, we finally get, after some other calculations, that $T \in LY$, namely the three lines are concurrent. □

Subiectul (8)**.** *Fiind date numerele întregi strict pozitive a, b, c, mutual coprime, notăm cu $g(a,b,c)$ cel mai mare număr întreg care nu poate fi reprezentat în forma $xa+yb+zc$, cu x, y, z numere întregi strict pozitive. Demonstraţi că*

$$g(a,b,c) \geq \sqrt{2abc}.$$

M. Ivanov

Soluţie. Să considerăm primele c numere întregi mai mari sau egale cu $\sqrt{2abc}$. Presupunem că fiecare dintre ele se poate scrie sub forma $xa+yb+zc$, cu x, y, z numere întregi strict pozitive. Fiecărui număr îi asociem punctul de coordonate (x,y) (coeficienţii lui a, respectiv b); aceste puncte vor fi distincte.

Pe de altă parte, aceste puncte se situează în interiorul triunghiului determinat de axele Ox, Oy şi dreapta $xa+yb=\sqrt{2abc}$, a cărui arie este c. Numărul punctelor de coordonate întregi strict pozitive din interiorul acestui triunghi este însă mai mic decât c, deci unele puncte trebuie să coincidă, contradicţie. □

Remarcă. Soluţia oficială (adaptată mai sus) face apoi remarca faptului că nu este folosit decât că c. m. m. d. c.$(a,b,c)=1$, şi nu coprimalitatea mutuală; apoi afirmă că rezultatul mai puternic $g(a,b,c) \geq \sqrt{3abc}$ poate fi obţinut, cu metode mai sofisticate, constanta 3 fiind cea mai bună posibilă, după cum o arată faptul că $g(3, 3k+1, 3k+2) = 9k+5$.[6] Metoda însăşi de a "geometriza" problema, prin numărarea punctelor laticiale din triunghiul definit mai sus, este împrumutată din arsenalul teoriei generale.

[6] Problema este evident afină cu celebra problemă Frobenius ("the coin problem"), cu diferenţa marcată însă că acolo coeficienţii x, y, z pot lua şi valoarea zero, pentru care cea mai bună aproximare este $g(a,b,c) \geq \sqrt{3abc} - a - b - c$.

5. ÎNCHEIERE

Cu toate informaţiile acum disponibile, prezentarea mea este quasi-terminată.

Site-ul oficial este complet lăsat în paragină. Site-ul personal al lui A. Golovanov (care de la primele ediţii a fost implicat în acest concurs, ca propunător de probleme şi coordonator), şi care conţine istoricul concursului până în 2013, conţine în fine şi materialele pentru 2014, dar numai în limba rusă.[7] Din păcate soluţiile oficiale şi schemele de coordonare nu au fost niciodată postate în formă electronică. Broşuri tipărite, cu soluţii sumare, sunt distribuite participanţilor.

Concursul a fost, ca de obicei, destul de dificil, dar şi uneori interesant în ceea ce priveşte conţinutul matematic.

În concursul Juniori au participat 4 ţări, cu un total de 17 concurenţi la proba de matematică, iar în concursul Seniori au participat 3 ţări, cu un total de 34 de concurenţi la proba de matematică. Rezultatele delegaţiei României (precum şi ale echipei liceului Tudor Vianu) la TUYMAADA 2014 sunt, cu felicitările de rigoare (după caz)!

Nume			Şcoala	Total	Medalie
Theodor LUCESCU	IX	J	ICHB, Bucureşti	19	Bronz
Ştefan Rareş TUDOSE	IX	J	ICHB, Bucureşti	24	Argint
Filip-Alexandru ION	IX	J	C.N. Mihai Viteazu, Bucureşti	30	**Aur**
Alexandru PASCADI	IX	J	C.N. Tudor Vianu, Bucureşti	22	Argint
Robert Andrei DOBRAN	X	S	C.N. Tudor Vianu, Bucureşti	16	Menţiune
Ştefan PRICOPIE	X	S	C.N. Tudor Vianu, Bucureşti	0	
Cătălin-Andrei ILIE	XI	S	C.N. Mihai Viteazu, Ploieşti	30	Argint

Punctajul detaliat pe probleme a fost

Nume	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Total	Medalie
Theodor LUCESCU	7	2	0	7	0	3	0	0	19	Bronz
Ştefan Rareş TUDOSE	7	0	7	0	7	3	0	0	24	Argint
Filip-Alexandru ION	7	7	0	0	3	3	3	7	**30**	**Aur**
Alexandru PASCADI	7	2	7	0	3	3	0	0	22	Argint
Robert Andrei DOBRAN	7	0	0	0	7	2	0	0	16	Menţiune
Ştefan PRICOPIE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Cătălin-Andrei ILIE	1	7	7	0	7	1	7	0	30	Argint

Filip ION a obţinut cel mai mare punctaj în proba de Juniori; bravo!

Mă bucur pentru Andrei ILIE; după ce în mod abuziv (după mine) a fost împiedicat printr-o schimbare de regulament de ultimă secundă în a-şi ocupa locul cuvenit în echipa României pentru Tuymaada 2014, a fost ”co-optat” (printr-o măsură pe care o salut din toată inima) în echipa sa de către liceul Vianu din capitală, şi a obţinut un rezultat frumos.

[7] Nici măcar comunitatea de useri de pe AoPS (`www.mathlinks.ro`) nu a fost mai rapidă. Până ce Ştefan Tudose a postat subiectele (şi mi-a furnizat personal rezultatele), nimic nu s-a petrecut. Apoi am obţinut personal unele informaţii, direct de la A. Golovanov.

Ca tristă remarcă finală, acest concurs devine totuşi din ce în ce mai depopulat, şi lipsit de importanţă, deşi conţinutul matematic este decent. La ce bun continuăm să trimitem echipe la capătul pământului, când participarea generală este atât de scăzută, şi în majoră parte cu totul necompetitivă?