Albert Darius Sandru
Clasa VIIa, Newman Catholic Middle School
Weston, WI 54476, USA

Drepte antiparalele

Fie doua triunghiuri asemenea care au un unghi comun. Laturile respectiv opuse unghiului comun pot fi paralele, caz in care numim asemanarea directa a triunghiurilor (fig. 1) sau pot forma un patrulater inscriptibil, caz in care numim asemanarea indirecta (fig. 2)

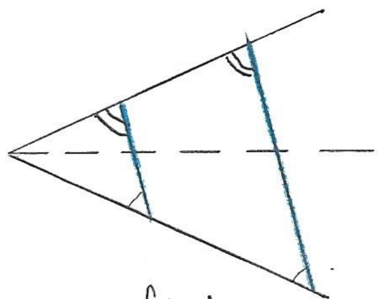


fig 1

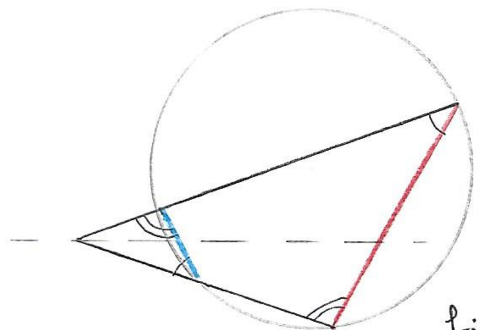


fig2

Definitie:

Fie o dreapta c. Spunem ca dreptele a si b (nicuna paralela cu c) sunt antiparalele in raport cu dreapta c daca simetrica b' a lui b fata de dreapta c este paralela cu dreapta a. (fig. 3)

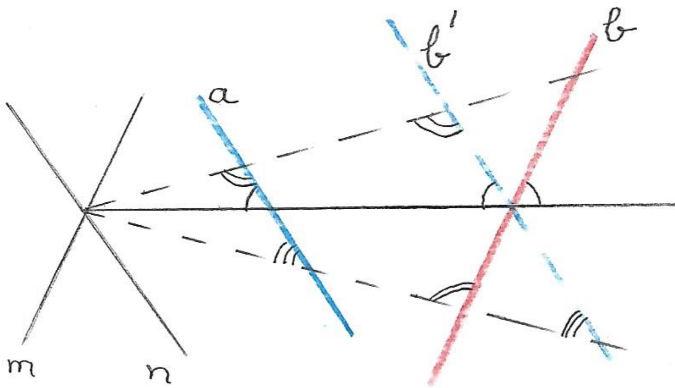


fig3

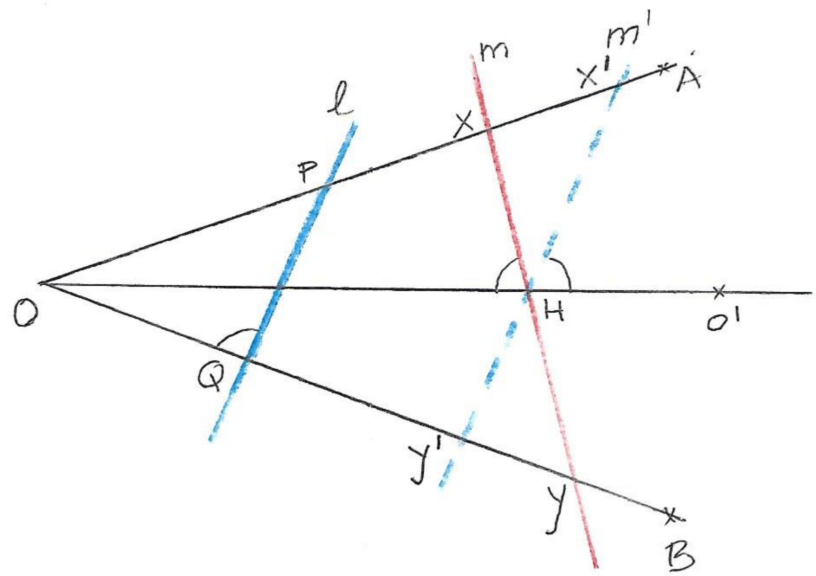
Proprietati:

a) Daca dreapta a este antiparalela cu dreapta b atunci este antiparalela cu toate dreptele paralele cu b.
b) (simetrie) Daca a este antiparalela cu b atunci b este antiparalela cu a.
c) Dreptele antiparalele cu o dreapta data sunt paralele intre ele.

Albert Darius Sandru
Clasa VIIa, Newman Catholic Middle School
Weston, WI 54476, USA

Teorema

Fie linia m intersectand semidreptele OA si OB ale unghiului < AOB in punctele X si respectiv Y. Fie linia l (l ≠ m) intersectand semidreptele OA si OB in punctele P si respectiv Q. Atunci l si m sunt antiparalele relative la bisectoarea unghiului < AOB daca si numai daca punctele X, Y, P si Q sunt conciclice.



Sa presunem ca l si m sunt antiparalele si fie n bisectoarea unghiului < AOB si fie m' simetrica lui m fata de n (unde n este bisectoarea < AOB). De aici rezulta ca <X'HO' ≡ < Y'HO (opuse la varf). Cum <XHO ≡ <X'HO' (din simetrie) rezulta <XHO ≡ <Y'HO. OH este comuna iar n este bisectoarea < AOB. Rezulta ca ΔOXH ≡ ΔOY'H (caz U.L.U.) Deci < OXH ≡ < OY'H. Dar < OY'H ≡ < OQP (ca unghiuri corespondente – m' || l). Dar < PQO si < PQB sunt suplementare. Rezulta ca < OXY si < PQY sunt suplementare. Ca urmare, X , Y, Q si P sunt conciclice.

Sa presupunem ca X, Y, Q si P sunt conciclice. Atunci vom avea <OXY ≡ <PQO. Din nou, m' este simetrica lui m fata de bisectoarea n. Considereand congruenta ΔOXH ≡ ΔOY'H rezulta ca l || m'.

Se pot considera si cazuri particulare ale teoremei demonstratiile fiind similare:

a) Daca X = P atunci linia OA este ţangenta la cercul circumscris ΔXOY
b) Daca O ∈ l atunci l este tangent la cercul circumscris ΔXYO

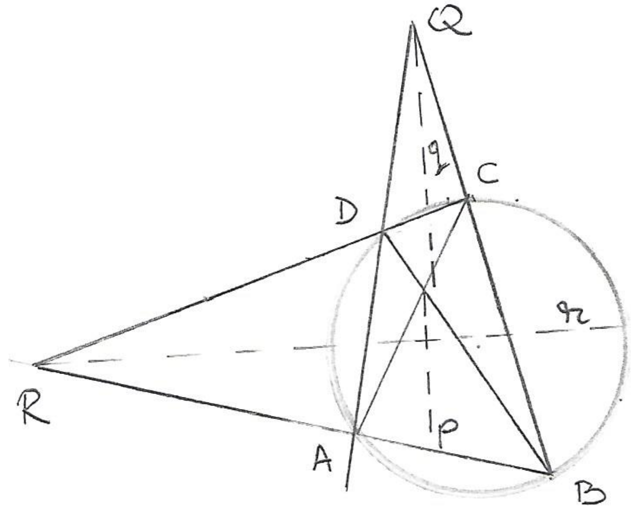
Caz particular

Doua linii antiparalele relativ la bisectoarea unui unghi (sau , mai general , relative la un unghi) se numesc izogonale daca se intersecteaza in varful unghiului (fig 3).

Albert Darius Sandru
Clasa VIIa, Newman Catholic Middle School
Weston, WI 54476, USA

Exemplu

Intr-un patrulater inscriptibil ABCD fie P = AC ∩ BD, Q = AD ∩ BC si R = AB ∩ CD. Fie p, q, r bisectoarele unghiurilor <APB, <AQB, <BRC. Sa se demonstreze ca dreapta r este perpendiculara pe dreptele p si q.



Cum ABCD este inscriptibil, AC si BD sunt antiparalele relativ la dreapta r deci formeaza cu dreapta r un trhiunghi isoscel. Cum p este bisectoare in acest triunghi isoscel rezulta ca p ⊥ r.

Deasemenea AD si BC sunt antiparalele. Deci AD si BC sunt antiparalele si formeaza un triunghi isoscel impreuna cu dreapta r. Cum dreapta q este bisectoare in triunghiul iseoscel rezulta q ⊥ r.

Consecinta

Intr –un patrulater inscriptibil ABCD, fie P = AC ∩ BD, Q = AD ∩ BC si R = AB ∩ CD. Daca l si l' sunt doua drepte antiparalele relativ la unul din unghiurile <APB, <AQB sau <BRC atunci l si l' sunt antiparalele relative la cele doua unghiuri ramase.

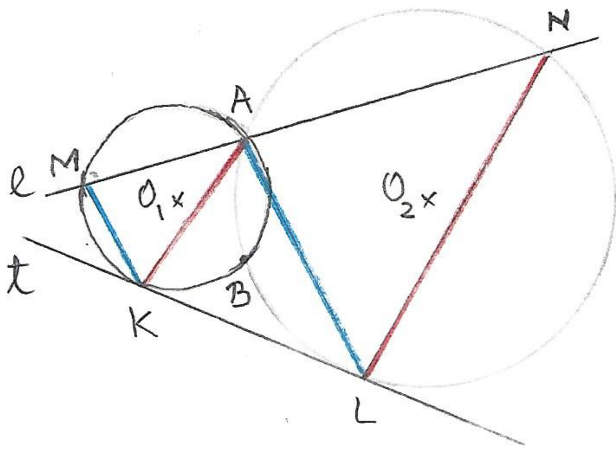
(din lipsa de spatiu lasam demonstratia pe seama cititorului, folosind exemplele de mai sus)

Exemplu (Olimpiada Cehia 2010)

Fie cercurile O_1 si O_2 care se interesecteaza in punctele A si B si fie punctele K si respective L determinate de tangenta lor comuna t in asa fel incat B apartine interiorului ΔKLA. Dreapta l (A ∈ l) intersecteaza cercurile O_1 si O_2 in M si respective N. Sa se demonstreze ca l este tangenta la cercul circumscris ΔKLA daca si numai daca punctele K, L, M si N sunt conciclice.

Consideram m bisectoarea unghiului format de dreptele t si l. Perechile de linii antiparalele la care ne vom referi vor fi relative la dreapta m.

Albert Darius Sandru
Clasa VIIa, Newman Catholic Middle School
Weston, WI 54476, USA



Cum t este tangenta la cercul circumscris ΔKAM rezulta ca linia KA este antiparalela cu KM. La fel LA este antiparalela cu LN. Cum l este tangenta la cercul circumscris ΔKLA atunci KA si AL sunt antiparalele. Cum KM este antiparalela cu KA, KA cu AL si AL cu LN rezulta KM este antiparalela cu LN de unde rezutla KLMN este circumscriptibil.

Daca KLMN este circumscriptibil, AK este antiparalela cu KM, KM este antiparalela cu LN si LN este antiparalela cu LA. De aici KA este antiparalela cu LA si l este tangent la cercul circumscris triunghiului ΔKAL.

Nota: Puncte conciclice sunt puncte situate pe un cerc.

Bibliografie:

Geometrie – Manual pentru clasa VII, Ion Cuculescu, Constantin Ottescu, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti 1981
106 Geometry Problems, Titu Andreescu, Michal Rolinek, Joseph Tkadlec, Editura XYZ Press LLC 2013, Plano, Texas, USA.