Formarea, citirea și scrierea numerelor naturale 0 – 1 000 000

103. Pentru scrierea numerelor, pe planeta TRI se folosesc numai trei cifre reprezentate de semnele Ø, ◆ și ⊙. Semnul ⊙ este precum cifra 0 de la noi și nu poate să fie prima cifră a numărului. Câte numere de cinci cifre se pot scrie pe planeta TRI?

Rezolvare:

Numerele de cinci cifre pot fi notate sub forma $\overline{abcde}$.

Vom înlocui valorile literale cu cifrele de pe planeta TRI, pentru a forma numere.
Din enunțul problemei aflăm că cifra ⊙ nu poate fi prima cifră a numărului, așadar înlocuim pe ***a*** în două moduri (cu cifrele Ø și ◆).
b poate lua, pe rând, fiecare dintre cele trei valori reprezentate de cifrele de pe planeta TRI (Ø,◆ și ⊙).
La fel și în cazul literelor ***c, d,*** și ***e***, fiecare dintre ele poate lua câte 3 valori, corespunzătoare celor trei cifre.
Atunci, numărul de numere de forma $\overline{abcde}$ de pe planeta TRI este: $2\times3\times3\times3\times3=162$ (numere).

104. Scriem șirul numerelor naturale pare fără să le separăm. Aflați a $2\,009$-a cifră.

Rezolvare:

Numerele pare scrise cu o cifră sunt: $0, 2, 4, 6, 8.$ Deci 5 cifre.

Numerele pare scrise cu două cifre sunt: $10, 12, 14, ..., 98.$ Sunt 45 de numere $\left((98-10):2+1\right)$ deci 90 de cifre (45×2).

Numerele pare scrise cu trei cifre sunt: $100, 102, 104, ..., 998.$ Sunt 450 de numere $\left((998-100):2+1\right)$, deci $1\,350$ de cifre (450×3).

Până acum s-au scris $1\,445$ cifre $(5+90+1350)$. Mai avem de scris 564 de cifre $(2\,009-1\,445)$.

Cum numerele care urmează a fi scrise au câte 4 cifre înseamnă că mai avem de scris 141 de numere (împărțind 564 la 4 obținem câtul 141).
Trebuie găsit al 141-lea număr, dacă numărăm din 2 în 2, începând cu $1\,000$.

Dacă al 141-lea număr este x atunci $(x-1\,000):2+1=141.$ De aici găsim $x=1280.$

În concluzie, dacă scriem toate numerele pare până la $1\,280$ avem $2\,009$ cifre. Atunci a $2\,009$-a cifră va fi 0.

105. Determinați cifrele a și b pentru care este adevărată egalitatea $\overline{a1}+\overline{a2}+\overline{a3}+\overline{a4}+\overline{a5}=\overline{bb}\times a$.

Rezolvare:

Folosind scrierea zecimală (descompunerea numerelor sub forma unei sume de produse), avem $a\times 10+1+a\times 10+2+a\times 10+3+a\times 10+4+a\times 10+5=b\times 11\times a$.

Efectuând calculele în primul membru, putem scrie: $50\times a+15=11\times a\times b\ (1)$.

Observând că ultima cifră a membrului din stânga este 5, iar a și b sunt cifre, deducem că: sau $a=5$ sau $b=5$.

Presupunând că $a=5$, vom efectua calculul și egalitatea devine: $265=11\times 5\times b$.

Știm că egalitatea rămâne adevărată dacă ambii membri ai acesteia sunt împărțiți la același număr. Împărțim la 5 ambii membri și vom obține: $53=11\times b$.

Constatăm că nu există un număr natural b, pentru care relația să fie adevărată.

Presupunem că $b=5$. Atunci egalitatea (1) devine: $50\times a+15=11\times a\times 5$.

Efectuăm calculul în membrul drept: $50\times a+15=55\times a$.

Efectuând, în continuare calculul, aflăm că $5\times a=15$, deci $a=3$.

În concluzie $a=3$ și $b=5$.

106. Numărul $\overline{abc}$ adunat cu răsturnatul său dau 585. Aflați numărul știind că cifra b este dublul lui a și cu 1 mai mare decât c.

Rezolvare:

Avem $\overline{abc}+\overline{cba}=585$

Descompunem cei doi termeni ai adunării sub forma unor sume de produse:

$\overline{abc}=100\times a+10\times b+c$ și $\overline{cba}=100\times c+10\times b+a$.

Scriem relația anterioară folosind descompunerea numerelor:

$100\times a+10\times b+c+100\times c+10\times b+a=585$

Efectuăm calculele posibile: $101\times a+20\times b+101\times c=585$.

Din datele problemei am aflat că $b=2\times a$ și $c=b-1$, deducem că $c=2\times a-1$.

Înlocuim în egalitatea inițială: $101\times a+20\times(2\times a)+101\times(2\times a-1)=585$.

Așadar, $101\times a+40\times a+202\times a-101=585$.

După efectuarea calculelor, aflăm că $343\times a-101=585$ și, de aici, $343\times a=686$.

Așadar $a=2$.

Știm că $b=2\times a$, deci $b=4$ și $c=b-1$, deci $c=3$.

Numărul $\overline{abc}$ căutat este 243.

***107.** Află cel mai mare număr natural, mai mic decât $1\,000\,000$, care îndeplinește simultan condițiile:
a) suma cifrelor este 12;
b) produsul cifrelor este 12.

**Enunțul problemei a fost completat față de cel din culegere.*

Rezolvare:
Pentru început, căutăm factori (numere de o cifră) al căror produs să fie 12. Cu cifrele respective vom forma numere pentru a-l identifica pe acela care respectă condițiile cerute.
Avem următoarele variante:

a) $6\times 2=12$, deci numărul format este 62, suma cifrelor sale fiind 8;

b) $4\times 3=12$, numărul format fiind 43, suma cifrelor sale fiind 7;

c) $3\times 2\times 2=12$, numărul format este 322, suma cifrelor sale fiind 7.

Observăm că niciunul dintre numerele găsite nu are suma cifrelor 12.
Una dintre proprietățile înmulțirii este aceea că orice număr înmulțit cu 1 are ca produs același număr. Așadar factorul 1 nu va schimba produsul, în cazul variantelor găsite anterior.
Știind acest lucru, putem obține suma cifrelor 12 adunând în mod repetat 1, astfel:

a) $6+2+1+1+1+1=12$, deci numărul format cu aceste cifre este 621111;

b) $4+3+1+1+1+1+1=12$, numărul format fiind $4\,311111$, dar acesta este mai mare decât $1\,000\,000$;

c) $3+2+2+1+1+1+1+1=12$, numărul format fiind $32\,211111$ și acesta este mai mare decât $1\,000\,000$.

Așadar numărul căutat este 621111.

Adunarea şi scăderea numerelor naturale în concentrul 0 – 1 000 000, fără trecere și cu trecere peste ordin

195. Considerăm 20 de numere naturale diferite mai mari sau egale cu 2 având suma 416. Arătați că printre acestea există cel puțin două numere impare.

Rezolvare:

Presupunem că toate cele 20 de numere sunt pare. Mai mult, ele sunt cele mai mici 20 de numere diferite. Atunci: $2+4+6+...+40=42\times 20:2=42\times 10=420$.

Dar suma celor 20 de numere trebuie să fie 416. Cum numerele nu pot fi egale rezultă că cel puțin unul dintre ele este impar.

Dacă numai unul ar fi impar, atunci suma ar trebui să fie impară, deci trebuie să avem un număr par de numere impare, adică cel puțin două.

196. Este posibil să așezăm 90 de bile în 13 cutii astfel încât în fiecare cutie să avem cel puțin o bilă și să nu existe două cutii cu același număr de bile? Justificați răspunsul dat.

Rezolvare:

Să presupunem că în prima cutie avem o bilă, în a doua cutie 2 bile și așa mai departe, în cutia 13 avem 13 bile.

Atunci numărul de bile ar fi $1+2+3+...+13=13\times 14:2=91$.

Dar, numărul de bile era 90, deci nu este posibil să așezăm 90 de bile în 13 cutii astfel încât în fiecare cutie să avem cel puțin o bilă și să nu existe două cutii cu același număr de bile.

Operația de înmulțire. Proprietățile înmulțirii

255. În fiecare căsuță a careului alăturat scrie numere diferite. Află produsul acestor numere, știind că suma lor este 120.

<u>Rezolvare:</u>

Constatăm că în careu putem scrie 16 numere. Deoarece suma lor este un număr destul de mic, 120, atunci presupunem că acesta conține primele numere naturale nenule diferite.
Calculăm suma acestora:

$1+2+3+....+15+16=16\times(16+1):2=16\times17:2=17\times16:2=17\times8=136$

$136-120=16$

Observăm că suma calculată depășește cu 16 numărul 120, deci trebuie să calculăm suma primelor 15 numere naturale.

$1+2+3+....+15=15\times(15+1):2=15\times16:2=15\times8=120$

Ca suma să rămână neschimbată cel de-al 16–lea număr trebuie să fie 0 (zero).
Produsul celor 16 numere este $1\times2\times3\times....\times15\times0=0$ (zero).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	0

288. Scrie numărul 22 ca sumă de termeni al căror produs să fie 22.

<u>Rezolvare:</u>

Deoarece $22=2\times11$, înseamnă că doi dintre termeni sunt 2 și 11.

Dar suma acestor doi termeni $(2+11=13)$ nu este 22.

Având în vedere că orice număr natural $a\times1=a$, vom completa suma dintre 2 și 11 cu atâtea cifre de 1 până obținem 22.
Așadar, $22=2+11+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ și $22=2\times11\times1\times1\times1\times1\times1\times1\times1\times1\times1$.

289. Câte numere naturale de patru cifre au produsul cifrelor 0?

Rezolvare:

Pentru ca produsul cifrelor unui număr să fie 0 trebuie ca cel puțin o cifră să fie 0.
Putem gândi problema astfel: din totalul numerelor de patru cifre le scădem pe cele care nu conțin cifra 0.
Numărul total de numere de patru cifre este $9\,999-999=9\,000$.
Numerele care nu au cifra 0 pot avea pe locul unităților oricare dintre celelalte 9 cifre, pe locul zecilor 9 cifre, pe locul sutelor 9 cifre și pe locul miilor tot una dintre cele 9 cifre.
În total sunt $9\times9\times9\times9=6\,561$ (*numere care nu au cifra* 0).
Așadar, numărul de numere cu produsul cifrelor 0 este $9\,000-6\,561=2\,439$ (*numere*).

Operația de împărțire

388. Pe o dreaptă sunt scrise numerele de la 0 până la 2 014. Alin încearcă să șteargă numerele din trei în trei, începând de la 0, iar Dana din cinci în cinci, începând de la 0. Un număr dispare dacă este șters de amândoi copiii. Câte numere reușesc să șteargă cei doi copii?

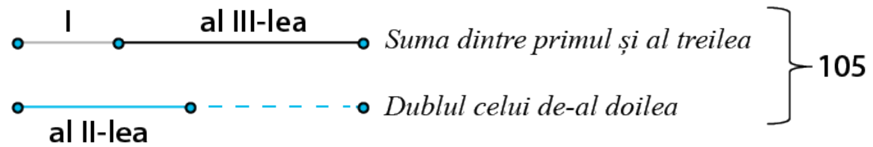
Rezolvare:

După ce îl șterge pe 0, Alin încearcă să șteargă numerele $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30...$ iar Dana, după ce îl șterge pe 0, încearcă să șteargă numerele $5, 10, 15, 20, 25, 30...$.
Observăm că dispar numerele din cincisprezece în cincisprezece, așadar dispar toate numerele de forma $15 \times n \le 2\,014$, deci $n \le 2\,014 : 15$, de unde $n \le 134$. În concluzie, cei doi copii reușesc să șteargă 135 de numere fiindcă inițial amândoi au șters și numărul 0.

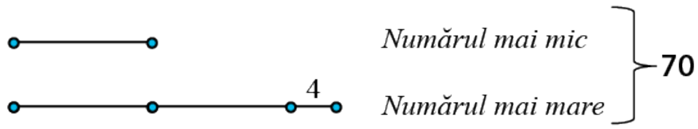
405. Suma a trei numere naturale este 105. Suma dintre primul și al treilea este dublul celui de al doilea număr. Află cele trei numere știind că dacă îl împărțim pe al treilea la primul obținem câtul 2 și restul 4.

Rezolvare:

Rezolvăm problema prin metoda grafică.



Din figura de mai sus rezultă că suma de 105 o putem privi ca de trei ori al doilea număr. Deducem atunci că al doilea număr este $105 : 3 = 35$ și suma dintre primul număr și al treilea este $105 - 35 = 70$.
Pentru a afla primul și al treilea număr formulăm o nouă problemă, introducând datele aflate mai sus: „Suma a două numere este 70. Dacă îl împărțim pe cel mai mare la cel mai mic obținem câtul 2 și restul 4”. Rezolvăm și această problemă prin metoda grafică.



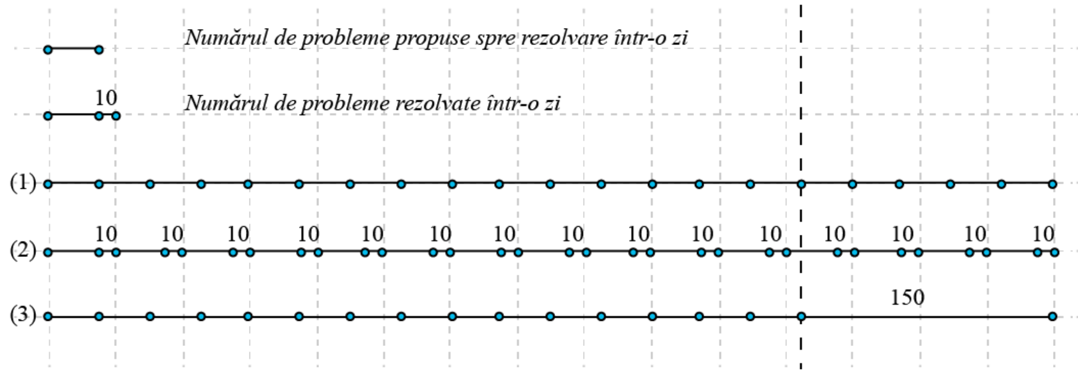
Suma celor două numere este 70.
Din desen se poate vedea că avem 1 + 2 = 3 părți egale a căror sumă este $70 - 4 = 66$.
Valoarea unei părți egale reprezintă numărul mai mic: $66 : 3 = 22$.
Numărul mai mare este: $22 \times 2 + 4 = 48$ (sau $70 - 22 = 48$).
În concluzie, cele trei numere sunt 22, 35 și 48.

Organizarea și reprezentarea datelor. Probleme

466. Andrei își programează să lucreze un număr de probleme, zilnic același număr, timp de 20 de zile. Dacă ar lucra în fiecare zi cu 10 probleme mai mult ar termina problemele în 15 zile. Câte probleme a programat Andrei să lucreze?

Rezolvare:

În figura de mai jos, la (1) am reprezentat numărul total de probleme pe care Andrei le-a programat să le rezolve în 20 de zile.



La (2) am reprezentat tot numărul total de probleme, dacă Andrei ar rezolva cu 10 probleme mai mult în fiecare zi.
La (3) este aceeași situație ca la (2), dar cele 10 probleme pe care le rezolvă în plus în fiecare zi sunt figurate împreună. Comparând (1) cu (3) observăm că în 5 zile s-au rezolvat 150 de probleme.
Înseamnă că într-o zi Andrei a programat să rezolve 30 de probleme $(150:5)$.
În concluzie, numărul total de probleme propuse pentru rezolvare este de $30\times 20=600$.

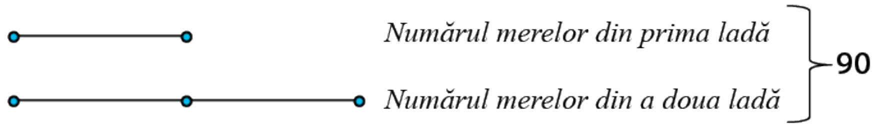
Rezolvare alternativă:

Mai întâi, vom afla cu câte zile ar termina mai repede rezolvarea tuturor problemelor, dacă ar lucra în fiecare zi cu 10 mai multe: $20-15=5$ (zile)
Aflăm câte probleme lucrează Andrei în 5 zile: $15\times 10=150$ (probleme)
Așadar el lucrează 150 de probleme în 5 zile, asta înseamnă că într-o zi rezolvă:
$150:5=30$ (probleme)
În cele 20 de zile Andrei are de rezolvat: $20\times 30=600$ (probleme)

476. În două lăzi sunt 90 de mere. Dacă din prima ladă transferăm două mere în lada a doua, atunci în prima ladă vom avea de două ori mai puține mere decât în lada a doua. Câte mere sunt în fiecare ladă?

<u>Rezolvare:</u>

După transferul celor două mere din prima ladă în a doua ladă situația se prezintă ca în figura de mai jos.

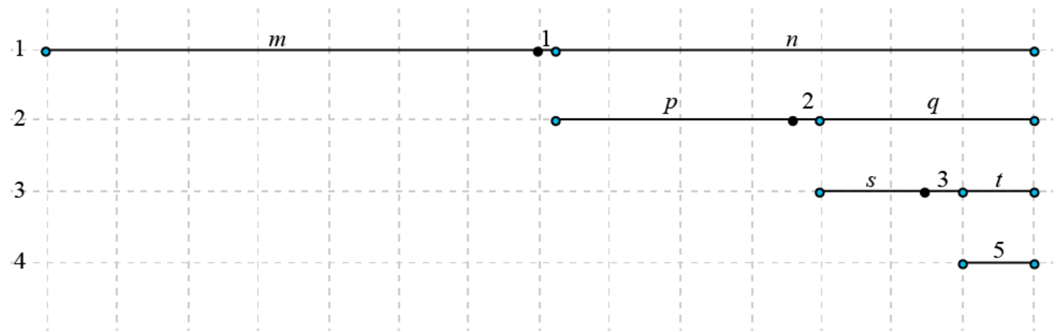


Se observă că avem 3 părți egale. Deoarece în cele două lăzi sunt 90 de mere, deducem că o parte înseamnă $90:3=30$ (mere).

Atunci în prima ladă, după transfer sunt 30 de mere, iar în cea de-a doua sunt $2\times 30=60$ (mere), deci înainte de transfer în prima ladă erau $30+2=32$ (mere) iar în a doua ladă erau $60-2=58$ (mere) sau $90-32=58$ (mere).

477. Patru frați primesc o sumă de bani pe care o pun într-un sertar. A doua zi fratele cel mare ia jumătate din bani și încă 1 leu. A treia zi, cel de-al doilea frate ia jumătate din banii din sertar și încă 2 lei. A patra zi, al treilea frate ia jumătate din banii din sertar și încă 3 lei. A cincea zi, mezinul ia din sertar ultimii 5 lei. Câți bani au fost în sertar la început?

Rezolvare:



În figura de mai sus, la 1 segmentul notat cu *m* reprezintă jumătate din bani, iar segmentul notat cu *n* ce a rămas după ce a luat bani primul dintre frați.
La 2 segmentul notat cu *p* reprezintă jumătate din banii rămași, iar segmentul notat cu *q* ce a rămas după ce a luat bani cel de-al doilea frate.
La 3 segmentul notat cu *s* reprezintă jumătate din banii rămași, iar segmentul notat cu *t* ce a rămas după ce a luat bani cel de-al treilea frate.
Atunci, din desen, deducem $t=5$, de unde $s=8\ (5+3)$. Rezultă că cel de-al treilea frate a luat $8+3=11$ (lei).
Acum $q=16\ (8\times 2)$, de unde $p=18\ (16+2)$. Rezultă că cel de-al doilea frate a luat $18+2=20$ (lei).
În sfârșit, $n=36\ (18\times 2)$, de unde $m=37\ (36+1)$. Rezultă că fratele cel mare a luat $37+1=38$ (lei).
Suma de bani care a fost la început în sertar este egală cu $38+20+11+5=74$ (lei).

478. Ionel avea 112 lei. După ce cumpără o carte constată că pe carte a plătit o șeptime din banii care i-au rămas. Câți bani i-au rămas lui Ionel?

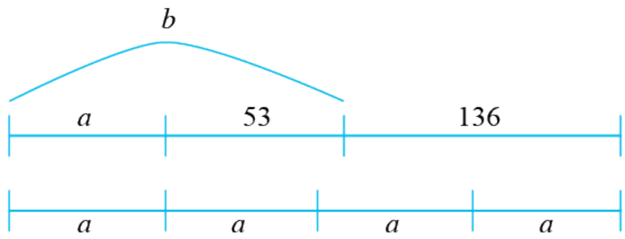
Rezolvare:

Observăm că suma rămasă reprezintă de 7 ori suma cheltuită.
Așadar, suma de 112 lei este formată din 8 părți egale; pe una a cheltuit-o, celelalte 7 i-au rămas.
O singură parte înseamnă $112:8=14$.(lei) Suma rămasă este de $14\times 7=98$(lei).

479. Află două numere știind că dacă la primul număr se adaugă 53, suma obținută este egală cu al doilea număr, iar dacă la al doilea număr se adaugă 136, suma obținută va fi de patru ori mai mare decât primul număr.

<u>Rezolvare:</u>

Reprezentăm grafic datele problemei:
Vom nota cu ***a*** primul număr și cu ***b*** cel de-al doilea număr.



Din desen se poate observa că suma numerelor 53 și 136 reprezintă de 3 ori valoarea primului număr. Așadar:

$53+136=189$ și $189:3=63$ (primul număr)

$63+53=116$ (al doilea număr)

<u>Rezolvare alternativă:</u>

Fie două numere *a* și *b*. Din datele problemei obținem $a+53=b$ și $b+136=4\times a$.

Înlocuim pe *b* în funcție de *a* în a doua relație, adică $a+53+136=4\times a$, și obținem $4\times a-a=53+136$. Continuăm calculele pentru a-l afla pe *a*.

Avem $3\times a=189$, $a=189:3$, deci $a=63$.

Îl aflăm și pe *b*. Obținem $b=53+63$, $b=116$.

Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor. Probleme

527. Pentru 4 kg de mere, 3 kg de struguri și 6 kg de cartofi s-au plătit 49 de lei. Pentru 5 kg de mere, 2 kg de struguri și 3 kg de cartofi, de aceeași calitate, s-au plătit 39 de lei. Cât costă un kilogram din fiecare, dacă pentru 3 kg de mere și 2 kg de struguri s-au plătit 22 de lei?

Rezolvare:

Așezăm datele problemei astfel:
4 *kg de mere*.....3 *kg de struguri*.....6 *kg de cartofi*.....49 *lei*
5 *kg de mere*.....2 *kg de struguri*.....3 *kg de cartofi*.....39 *lei*
3 *kg de mere*.....2 *kg de struguri*................................22 *lei*
Vom face ca în primele două situații (rândurile 1 și 2) să avem aceeași cantitate de cartofi. Pentru aceasta înmulțim situația a doua (rândul 2) cu 2. Cu aceasta problema devine:
4 *kg de mere*.....3 *kg de struguri*.....6 *kg de cartofi*.....49 *lei*
10 *kg de mere*.....4 *kg de struguri*.....6 *kg de cartofi*.....78 *lei*
3 *kg de mere*.....2 *kg de struguri*................................22 *lei*
Acum, din primele două situații (rândurile 1 și 2 actuale) deducem:
6 *kg de mere*.....1 *kg de struguri*................................29 *lei*
Această nouă situație împreună cu ultima situație dată în problemă (rândul 3) ne conduce la
6 *kg de mere*.....1 *kg de struguri*................................29 *lei*
3 *kg de mere*.....2 *kg de struguri*................................22 *lei*
În problema nou obținută vom face în așa fel încât în cele două situații una dintre mărimi să se exprime prin același număr. Alegem să avem aceeași cantitate de mere. În acest scop înmulțim rândul 2 cu 2 și obținem:
6 *kg de mere*.....1 *kg de struguri*................................29 *lei*
6 *kg de mere*.....4 *kg de struguri*................................44 *lei*
De aici deducem că diferența de 15 lei $(44-29)$ provine din diferența cantităților de struguri, adică 3 kg $(4-1)$.

Așadar, dacă 3 kg de struguri costă 15 lei, rezultă că 1 kg de struguri costă 5 lei $(15:3)$.

Acum, dacă 1 kg de struguri costă 5 lei, înseamnă că 6 kg de mere costă 24 lei (din 6 *kg de mere*.....1 *kg de struguri* ....29 *lei*), de unde aflăm că 1 kg de mere costă 4 lei $(24:6)$.

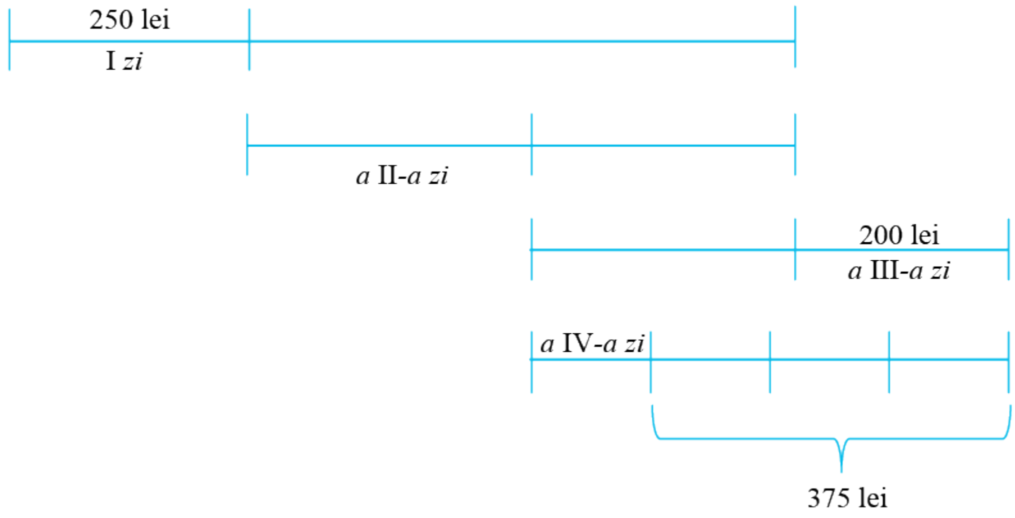
În sfârșit, din 4 *kg de mere*.....3 *kg de struguri*.....6 *kg de cartofi*.....49 *lei* cunoscând prețul pentru 1 kg de mere și 1 kg de struguri deducem că 6 kg de cartofi costă 18 lei $(49-4\times4-3\times5)$.

Atunci 1 kg de cartofi costă 3 lei $(18:6)$.

545. Din suma de bani pe care o are, Alin cheltuiește în prima zi 250 de lei. A doua zi cheltuiește jumătate din suma rămasă. A treia zi primește de la bunica 200 de lei, iar a patra zi cheltuiește un sfert din banii care îi rămân după ziua a treia. Ce sumă de bani a avut inițial, dacă acum mai are 375 de lei?

Rezolvare:

Reprezentăm grafic datele problemei:



Mai întâi vom afla ce sumă de bani i-a rămas lui Alin după cea de-a treia zi:
$375:3\times 4=500$ (lei).
Calculăm apoi câți lei i-au rămas după cheltuielile făcute în prima zi:
$(500-200)\times 2=600$ (lei)
Acum vom putea afla ce sumă a avut inițial Alin:
$600+250=850$ (lei)

Rezolvare alternativă:
Notăm: a = suma de bani inițială
b = suma de bani la sfârșitul zilei 1
c = suma de bani la sfârșitul zilei 2
d = suma de bani la sfârșitul zilei 3

Obținem:

$a-250=b$

$b:2=c$

$c+200=d$

$d-(d:4)=375\,|\cdot 4$

$4d-d=1500$

$3d=1500\,|:3$

$d=500$

$\left.\begin{array}{l} c+200=d \\ d=500 \end{array}\right\} \Rightarrow c+200=500 \Rightarrow$

$\Rightarrow c=500-200 \Rightarrow c=300$

$\left.\begin{array}{l} b:2=c \\ c=300 \end{array}\right\} \Rightarrow b:2=300 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=2\times 300 \Rightarrow b=600$

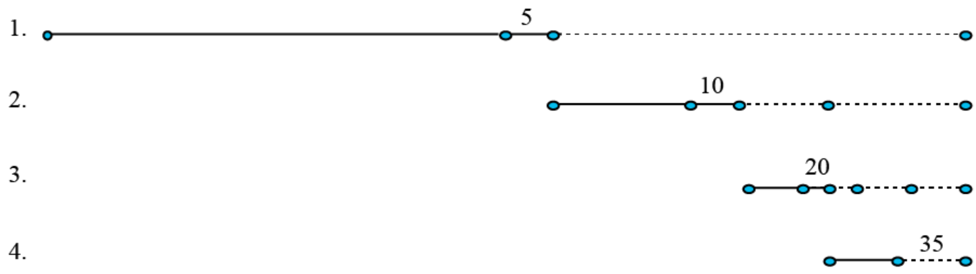
$\left.\begin{array}{l} a-250=b \\ b=600 \end{array}\right\} \Rightarrow a-250=600 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=250+600 \Rightarrow a=850$

546. Ana a cheltuit în prima zi jumătate din suma de bani pe care o avea și încă 5 lei. A doua zi a cheltuit o treime din ce i-a rămas și încă 10 lei. A treia zi un sfert din noul rest și încă 20 de lei, iar a patra zi jumătate din ce i-a rămas și ultimii 35 de lei. Câți lei a avut Ana?

Rezolvare:

Reprezentăm grafic datele problemei.

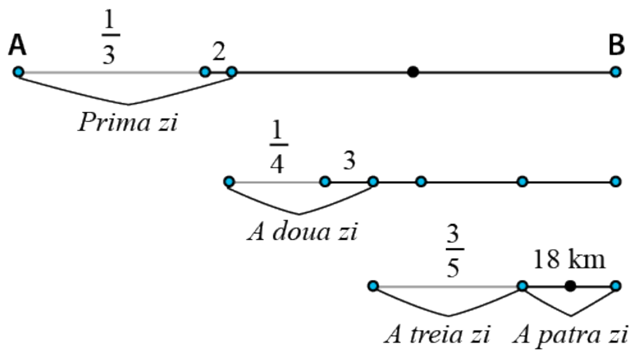


Pentru rezolvare, vom folosi metoda mersului invers.
În a patra zi a cheltuit $35+35=70$ (lei) ceea ce reprezintă suma rămasă după a treia zi.
Dacă ne uităm la suma de bani rămasă după cea de-a doua zi deducem că trei sferturi din această sumă înseamnă $70+20=90$ (lei) și atunci un sfert înseamnă $90:3=30$ (lei), adică după a doua zi i-au rămas $30\times4=120$ (lei).
Dacă ne uităm la suma rămasă după prima zi deducem că două treimi din această sumă înseamnă $120+10=130$ (lei) și atunci o treime din suma respectivă este $130:2=65$ (lei), adică după prima zi i-au rămas $65\times3=195$ (lei).
Urmărind graficul constatăm că jumătate din suma pe care a avut-o inițial Ana înseamnă $195+5=200$ (lei), deci suma inițială a fetei a fost $200\times2=400$ (lei).

Fracții

627. Un biciclist parcurge distanța dintre orașele A și B în 4 zile. În prima zi parcurge $\frac{1}{3}$ din drum și încă 2 km, a doua zi $\frac{1}{4}$ din rest și încă 3 km. A treia zi parcurge $\frac{3}{5}$ din noul rest și constată că pentru a patra zi i-au rămas 18 km. Ce distanță este între cele două orașe?

<u>Rezolvare:</u>

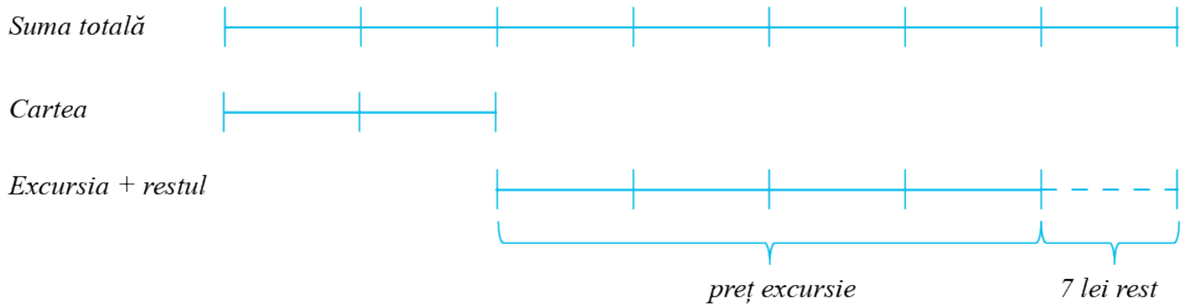


Din figura de mai sus se observă că $\frac{2}{5}$ din drumul rămas după a doua zi înseamnă 18 km și atunci „o cincime" din acesta înseamnă $18:2=9$ (km).
Întregul drum rămas după a doua zi reprezintă cinci „cincimi", adică $9\times5=45$ (km).
Dacă în ziua a doua a parcurs $\frac{1}{4}$ din drumul rămas după prima zi și încă 3 km și au rămas 45 km, înseamnă că „trei pătrimi" din acesta reprezintă $45+3=48$ (km). Atunci „o pătrime" înseamnă $48:3=16$ (km).
Drumul rămas după prima zi reprezintă „patru pătrimi", adică $16\times4=64$ (km).
Dacă în prima zi a parcurs $\frac{1}{3}$ din distanța dintre orașele A și B și încă 2 km și au rămas 64 km, înseamnă că „două treimi" din această distanță reprezintă $64+2=66$ (km). Atunci „o treime" înseamnă $66:2=33$ (km).
Deci, lungimea totală a distanței dintre cele două orașe este de „trei treimi", adică $33\times3=99$ (km).

628. Cu $\frac{2}{7}$ din suma de bani pe care o are, Ana cumpără o carte, iar cu $\frac{4}{5}$ din rest achită contravaloarea unei excursii. Ce sumă de bani a avut, dacă i-au rămas 7 lei?

Rezolvare:

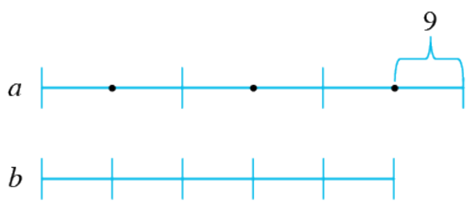
Mai întâi reprezentăm grafic datele problemei.



Observăm pe desen că suma totală este reprezentată de 7 părți egale cu acea parte care reprezintă restul. Cum restul este de 7 lei, putem calcula suma totală a Anei: $7 \times 7 = 49$ lei

630. O treime dintr-un număr este egală cu două cincimi din alt număr. Aflați numerele știind că diferența lor este 9.
Rezolvare:

Pentru a rezolva problema folosim metoda figurativă:
Mai întâi reprezentăm grafic datele problemei. Vom nota cu *a* primul număr și cu *b* cel de-al doilea.



Primul număr a fost împărțit în treimi (întregul conține $\frac{3}{3}$).

Al doilea număr a fost împărțit în cincimi (întregul conține $\frac{5}{5}$) .

Pe desen am arătat că $\frac{1}{3}$ din $\mathbf{a} = \frac{2}{5}$ din **b.**

Urmărind desenul observăm că o parte egală cu $\frac{1}{5}$ din numărul **b** are valoarea 9.

Așadar $\mathbf{b} = 5 \times 9$, $\mathbf{b} = 45$.

Din datele problemei știm că $\frac{2}{5}$ din $\mathbf{b} = \frac{1}{3}$ din **a**. Deci, $\frac{1}{3}$ din $\mathbf{a} = 2 \times 9 = 18$. din

Așadar $\mathbf{a} = 3 \times 18$, $\mathbf{a} = 54$.

631. Se dau două numere. $\frac{2}{3}$ dintr-un număr valorează cât $\frac{3}{5}$ din alt număr, iar suma celor două numere este 57. Aflați cele două numere.

Rezolvare:

Considerăm numerele *a* și *b*. Notăm o treime din *a* cu *m* și o cincime din *b* cu *n*. Obținem astfel $a = 3\times m$ și $b = 5\times n$, respectiv $2\times m = 3\times n$ ($\frac{2}{3}$ din *a* valorează cât $\frac{3}{5}$ din *b*). Rezultă:

$3\times(a+b) = 3\times a + 3\times b = 9\times m + 15\times n = 9\times m + 5\times(3\times n) \Rightarrow$

$3\times(a+b) = 9\times m + 5\times(2\times m) = 9\times m + 10\times m \Rightarrow 3\times(a+b) = 19\times m$ (1)

Cum $a+b=57$ rezultă, înlocuind în (1), $3\times 57 = 19\times m \Rightarrow 171 = 19\times m \Rightarrow m = 171:19 \Rightarrow m = 9$.

Îl aflăm și pe *n*, înlocuind pe *m* în relația $2\times m = 3\times n$. Obținem

$2\times 9 = 3\times n \Rightarrow 18 = 3\times n \Rightarrow n = 18:3 \Rightarrow n = 6$.

Acum putem afla numerele *a* și *b*.

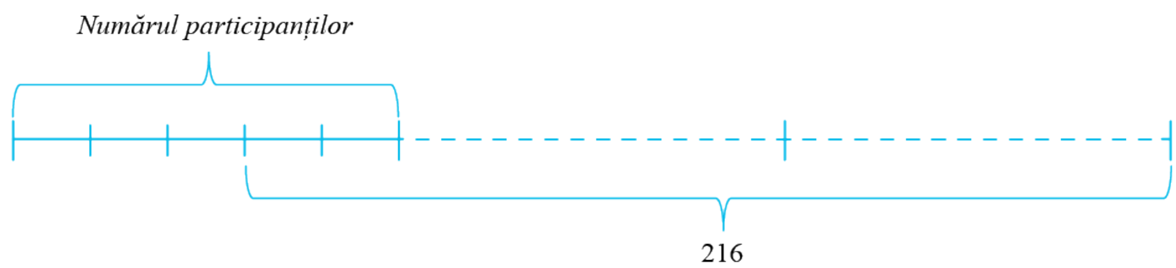
$a = 3\times m = 3\times 9 \Rightarrow a = 27$

$b = 5\times n = 5\times 6 \Rightarrow b = 30$

632. Dacă la un concurs literar ar fi participat de trei ori numărul copiilor existenți, ar fi fost cu 216 mai mulți decât $\frac{3}{5}$ din numărul participanților. Câți copii participă la concurs?

Rezolvare:

Reprezentăm grafic datele problemei:



Din desen observăm că 216 reprezintă valoarea a $\frac{2}{5}+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}$ adică a $\frac{12}{5}$ din numărul elevilor participanți la concurs.

Putem afla câți elevi reprezintă $\frac{1}{5}$ din numărul participanților: $216:12 = 18$ elevi.

Deci numărul elevilor participanți la concursul literar este: $18\times 5 = 90$ (elevi)

Rezolvare alternativă:

Notăm numărul copiilor participanți cu *a* și o cincime din *a* cu *m*. Obținem astfel că $a = 5\times m$.

Din datele problemei rezultă $3\times a = 216 + 3\times m$ (dacă „ar fi participat de trei ori numărul copiilor existenți, ar fi fost cu 216 mai mulți decât $\frac{3}{5}$ din numărul participanților").

Înlocuind $a = 5\times m$ în ultima relație rezultă:

$3\times(5\times m)=216+3\times m \Rightarrow 15\times m=3\times m+216 \Rightarrow$

$15\times m-3\times m=216 \Rightarrow 12\times m=216 \Rightarrow m=216:12 \Rightarrow m=18$

Obținem astfel $a=5\times m=5\times 18=90$ (de copii participă la concurs).

633. Jumătate din costul unei enciclopedii valorează cât trei sferturi din costul unui atlas geografic. Pentru a putea cumpăra atlasul, Ana a economisit în pușculiță o sumă de bani. Bunica i-a dăruit cu 8 lei mai mult decât a economisit ea, iar sora sa a împrumutat-o cu un sfert din suma economisită de Ana, adică 4 lei. Care este prețul enciclopediei?

Rezolvare:

Dacă un sfert din suma economisită de Ana este suma primită împrumut de la sora ei, adică 4 lei, atunci suma economisită de Ana este $4\times 4=16$ lei.

Suma primită de la bunica este $16+8=24$ lei.

Prețul atlasului geografic este egal cu suma economisită de Ana la care se adaugă sumele primite de la bunica și sora ei, deci $16+24+4=44$ lei.

Cum jumătate din prețul enciclopediei este egal cu trei sferturi din prețul atlasului, rezultă că jumătate din costul enciclopediei valorează $3\times(44:4)=3\times 11=33$ lei.

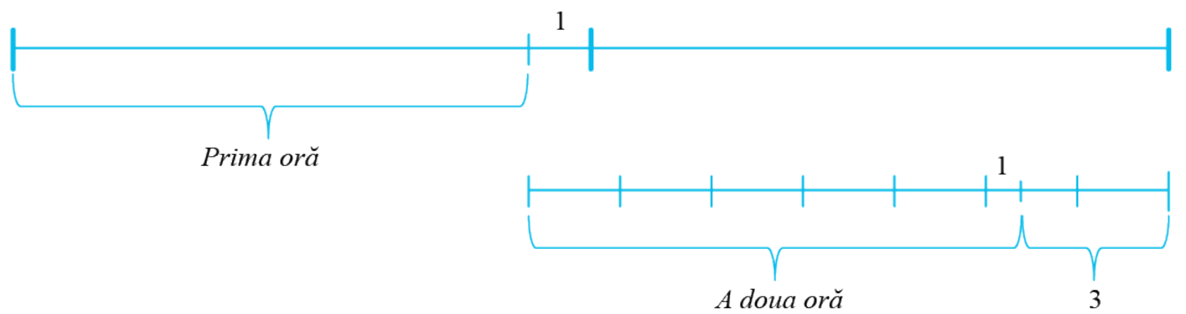
Prețul enciclopediei este $2\times 33=66$ lei.

634. Un biciclist merge în prima oră cu 1 km mai puțin decât jumătate din tot drumul pe care-l avea de parcurs. Ora a doua merge $\frac{5}{7}$ din drumul rămas și încă 1 km, după care mai are de parcurs 3 km. Ce lungime are drumul?

Rezolvare:

Pentru rezolvare vom folosi metoda mersului invers.

Vom începe prin a reprezenta grafic datele problemei:



Pe desen observăm că $\frac{2}{7}$ din drumul rămas de parcurs după prima oră este egal cu $3+1=4$ km, deci $\frac{1}{7}$ din drumul rămas este egal cu $4:2=2$ km. Rezultă că lungimea drumului rămas de parcurs după prima oră este $7\times 2=14$ km.

În prima oră biciclistul a parcurs cu 1 km mai puțin decât jumătate din tot drumul și i-au mai rămas de parcurs 14 km. Rezultă că jumătate din lungimea întregului drum este $14-1=13$ km.

Lungimea întregului drum este egală cu $13\times 2=26$ km.