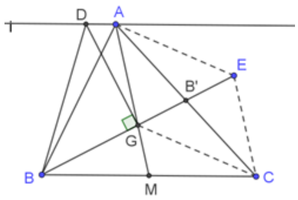
Problema 3
Etapa 3
Clasa a VII-a

Problema 3. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Ducem prin A o paralelă la BC pe care se ia un punct D astfel încât $DG \perp BG$. Dacă aria patrulaterului $AGBD$ este egală cu s, arătaţi că $AC \cdot BD \geq 2 \cdot s$.

Soluţie



Folosim următorul rezultat: În orice patrulater convex, aria patrulaterului este mai mică decât semiprodusul diagonalelor.

Notăm cu E simetricul punctului B faţă de G şi cu B' mijlocul lui AC. Deoarece $DG \perp BE$ şi $BG = GE$ rezultă că DG este mediatoarea segmentului BE, iar triunghiul DBE este isoscel cu $DB = DE$. De asemenea avem $GE = BG = 2 \cdot GB'$ deci B' este mijlocul lui GE, astfel că $AGCE$ este paralelogram. Din congruenţa triunghiurilor $AB'G$ şi $CB'E$ $(L.U.L.)$ rezultă că $\mathcal{A}_{AGE} = \mathcal{A}_{AGB'} + \mathcal{A}_{AB'E} = \mathcal{A}_{CB'E} + \mathcal{A}_{AB'E}$, deci $\mathcal{A}_{AGE} = \mathcal{A}_{AEC}$. Deoarece AG este mediană în triunghiul ABE avem $\mathcal{A}_{AGE} = \mathcal{A}_{AGB}$. Astfel $\mathcal{A}_{AGB} = \mathcal{A}_{AGE} = \mathcal{A}_{ACE}$. Din $AD \parallel BC$ rezultă $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD}$. Obţinem că $\mathcal{A}_{AGBD} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{ACD} + \mathcal{A}_{AEC} = \mathcal{A}_{AECD}$.

Astfel $2 \cdot s = 2 \cdot \mathcal{A}_{AGBD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{AECD} \leq AC \cdot DE = AC \cdot CD$.