ViitoriOlimpici.ro

Problema 3
Etapa 3
Clasa a VI-a

Problema 3. Determinați numerele naturale a și b știind că $a+b=42$ și $[a,b]=72$. Am notat $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

* * *

Soluţie: Dacă $(a,b)=d$ este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, atunci $a=dx$ și $b=dy$, unde x și y sunt numere naturale prime între ele.

Avem $d(x+y)=42$ (1), iar din $(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$ obținem $[a,b]=dxy$ (2)

Din (1) și (2) obținem $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{7}{12}$ sau $12x+12y=7xy$, iar de aici $x=\dfrac{12y}{7y-12}$.

Cum x este număr natural deducem că $7y-12 \mid 12y$. Dar $7y-12 \mid 7y-12$ și atunci $7y-12 \mid 7\cdot 12y-12\cdot(7y-12)$, de unde $7y-12 \mid 144$.

Mulțimea divizorilor lui 144 este $D_{144}=\{1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,48,72,144\}$, deci $7y-12\in\{1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,48,72,144\}$.

Avem de determinat y din egalitatea $7y-12=n$, unde $n\in D_{144}$. Obținem $y=\dfrac{n+12}{7}$.

Deoarece y este număr natural, egalitatea este adevărată pentru $n\in\{2,9,16,72\}$

Pentru $n=2$ avem $y=2$ și atunci $x=12$.

Pentru $n=9$ avem $y=3$ și atunci $x=4$

Pentru $n=16$ avem $y=4$ și atunci $x=3$

Pentru $n=72$ avem $y=12$ și atunci $x=2$

Ne convin variantele $x=4$, $y=3$ și $x=3$, $y=4$ deoarece 2 și 12 nu sunt prime între ele.

Din $d(x+y)=42$ obținem $d=6$ și atunci $a=24$, $b=18$ sau $a=18$, $b=24$.