# COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015 FAZA JUDEŢEANĂ

ABSTRACT. Comments on some of the problems presented at the 2015 District Round of the National Mathematics Olympiad.

Se adresează claselor IX, X, XI, XII.
Data: 16 martie 2015.
Autor: Dan (*le druide*) Schwarz, Bucureşti.

*Pour le courage, pour pas qu'il y ait de faille,*
*Pour rester grands et fiers quand nous serons dans la bataille.*
*................................................................*
*Quand mon regard se posa tout autour de moi,*
*J'étais le seul debout de la tribu; voilà pourquoi.*[1]

## 0. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Judeţene a Olimpiadei de Matematică 2015 reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

## 1. Clasa a IX-a

**Subiectul** (2). *Determinaţi numerele reale $a$ şi $b$ pentru care egalitatea*

$$\lfloor ax + by \rfloor + \lfloor bx + ay \rfloor = (a + b)\lfloor x + y \rfloor$$

*este adevărată oricare ar fi numerele reale $x$ şi $y$.*

*Soluţie.* Pentru $y = -x$ avem $\lfloor (a-b)x \rfloor + \lfloor (b-a)x \rfloor = 0$, ceea ce forţează $\boxed{a = b}$, căci altfel pentru $x = 1/2(a-b)$ obţinem $-1 = 0$, absurd.

Pentru $y = 0$ obţinem atunci $\lfloor ax \rfloor = a\lfloor x \rfloor$. O posibilitate este $\boxed{a = 0}$, care evident este acceptabilă; altfel pentru $x = 1$ obţinem $\lfloor a \rfloor = a$, deci $a \in \mathbb{Z}^*$. Dar acum pentru $x = 1/2$ obţinem $\lfloor a/2 \rfloor = 0$, deci $0 < a < 2$, ceea ce forţează $\boxed{a = 1}$, care posibilitate este şi ea acceptabilă. □

[1] La tribu de Dana – Manau, `https://www.youtube.com/watch?v=zoPp69wxLEI`

[2] Lipsesc unele probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Soluţiile oficiale şi baremele de corectare pot fi consultate la `http://ssmr.ro/bareme`. Rezultatele finale (după contestaţii) vor fi afişate pe site-ul Inspectoratului Bucureşti.

**Subiectul** (3). *Fie $m$ şi $n$ numere naturale, cu $m \geq 2$ şi $n \geq 3$. Demonstraţi că există $m$ numere naturale nenule distincte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, fiecare dintre ele divizibil cu $n-1$, astfel încât*

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{a_m}.$$

*G.M.-B.*

*Soluţie.* Aducându-ne aminte de arhicunoscuta relaţie $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n(n-1)}$ pentru $n \geq 2$ natural, este uşor să luăm $a_k = (n-1)^k$ pentru $1 \leq k \leq m-1$ şi $a_m = n(n-1)^{m-1}$. Soluţiile oficiale "make heavy duty" în jurul aceleiaşi aceste simple idei. □

**Subiectul** (4). *Determinaţi toate funcţiile $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care verifică relaţia*

$$\mathrm{d}(x, f(y)) \cdot \mathrm{m}(f(x), y) = \mathrm{d}(x, y) \cdot \mathrm{m}(f(x), f(y)), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{N}^*,$$

*unde $\mathrm{d}(a, b)$ şi $\mathrm{m}(a, b)$ desemnează cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale nenule $a$ şi $b$.*

*Soluţie.* Membrul drept este simetric în $x$, $y$, deci

$$\mathrm{d}(x, f(y)) \cdot \mathrm{m}(f(x), y) = \Big(\mathrm{d}(x, y) \cdot \mathrm{m}(f(x), f(y))\Big) = \mathrm{d}(y, f(x)) \cdot \mathrm{m}(f(y), x).$$

Pentru $y = f(x)$ obţinem $\mathrm{d}(x, f(f(x))) = \mathrm{m}(f(f(x)), x)$, ceea ce forţează $f(f(x)) = x$. Fie $f(1) = u$; atunci $1 = f(f(1)) = f(u)$. Luând acum $y = 1$ obţinem $\mathrm{d}(x, u) \cdot f(x) = \mathrm{m}(u, x)$. Pentru valoarea particulară $x = u^2$ avem $\mathrm{d}(u^2, u) \cdot f(u^2) = \mathrm{m}(u, u^2)$, adică $f(u^2) = u$, deci $u^2 = f(f(u^2)) = f(u) = 1$, care forţează $u = 1$. Finalmente, $\mathrm{d}(x, u) \cdot f(x) = \mathrm{m}(u, x)$ se scrie acum $\boxed{f(x) = x}$ pentru $x$ arbitrar, funcţie $f$ care verifică relaţia din enunţ. □

Rezultatele primei corectări la această clasă sunt surprinzătoare. Multe puncte deduse, mai ales la problemele 2, 3 şi 4 (problema 1 a fost o banală şi uşoară geometrie).

## 2. Clasa a X-a

**Subiectul** (1). *Arătaţi că pentru orice $n \geq 2$ natural, are loc inegalitatea*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \geq > \frac{n-1}{2n+2}.$$

*G.M.-B.*

*Soluţie.* Pentru orice $1 \leq j \leq k$ avem $j(2k+1-j) \leq k(k+1)$, prin urmare $(2k)! < (k(k+1))^k$ pentru $k \geq 2$. Aşadar

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n-1}{2n+2}.$$

O simplă telescopare, pentru o inegalitate destul de slabă.[3] Desigur, inducţia funcţionează la fel. Dar folosirea semnului $\geq$ este cu totul neavenită. $\square$

**Subiectul** (3)**.** *Determinaţi numerele complexe $z$ pentru care are loc relaţia*

$$|z| + |z - 5i| = |z - 2i| + |z - 3i|.$$

*Soluţie.* Avem $|5(z - 2\mathrm{i})| = |3z + 2(z - 5\mathrm{i})| \leq |3z| + |2(z - 5\mathrm{i})|$ şi la fel $|5(z - 3\mathrm{i})| = |2z + 3(z - 5\mathrm{i})| \leq |2z| + |3(z - 5\mathrm{i})|$. Prin adunarea relaţiilor obţinem $|z - 2\mathrm{i}| + |z - 3\mathrm{i}| \leq |z| + |z - 5\mathrm{i}|$. Egalitate se obţine deci (din cazurile de egalitate din inegalitatea triunghiului) pentru doar $z = y\mathrm{i}$, unde $y \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$. $\square$

**Subiectul** (4)**.** *Fie $f\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie neconstantă care are proprietatea*

$$f(x^y) = (f(x))^{f(y)},$$

*pentru orice $x, y > 0$. Să se arate că*

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ şi } f(x + y) = f(x) + f(y),$$

*pentru orice $x, y > 0$.*

*Soluţie.* Avem (prin proprietăţile elementare de manipulare a exponenţilor)

$$f(x)^{f(yz)} = f(x^{yz}) = f((x^y)^z) = f(x^y)^{f(z)} = \left(f(x)^{f(y)}\right)^{f(z)} = f(x)^{f(y)f(z)},$$

deci, deoarece există $x > 0$ cu $f(x) \neq 1$, vom avea $f(yz) = f(y)f(z)$ pentru orice $y, z > 0$. Dar atunci şi

$$f(x)^{f(y+z)} = f(x^{y+z}) = f(x^y x^z) = f(x^y)f(x^z) = f(x)^{f(y)} f(x)^{f(z)} = f(x)^{f(y)+f(z)},$$

deci $f(y + z) = f(y) + f(z)$ pentru orice $y, z > 0$.

De notat că există o singură astfel de funcţie neconstantă; singura funcţie reală aditivă **şi** multiplicativă este funcţia identitate $f(x) = x$ (iar singura funcţie constantă care verifică relaţia din enunţ este $f(x) = 1$). $\square$

## 3. Clasa a XI-a

**Subiectul** (1)**.** *Fie $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ o funcţie cu proprietatea că pentru oricare $y \in [0, 1]$ şi oricare $\varepsilon > 0$ există $x \in [0, 1]$ astfel încât $|f(x) - y| < \varepsilon$.*

*a) Demonstraţi că dacă $f$ este continuă pe $[0, 1]$ atunci $f$ este surjectivă.*

*b) Daţi un exemplu de funcţie $f$ cu proprietatea din enunţ, care să nu fie surjectivă.*

[3] Pentru $n = 999$ WolframAlpha oferă o valoare mai mare decât $\frac{7}{10}$, în timp ce marginea din problemă este mai mică decât $\frac{1}{2}$. Ca o curiozitate, seria $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}}$ este convergentă, foarte probabil la o valoare subunitară.

*Soluţie.* Condiţia din enunţ se traduce prin a spune că imaginea lui $f$ este densă în $[0,1]$. Se dovedeşte însă că era suficient să fie dată pentru $y \in \{0,1\}$.
a) O funcţie reală continuă îşi atinge extremele pe un interval mărginit închis. Dacă am avea $M = \max_{x\in[0,1]} f(x) < 1$, atunci condiţia din enunţ ar fi contrazisă pentru $y = 1$ şi $\varepsilon = (1-M)/2$. Dacă am avea $m = \min_{x\in[0,1]} f(x) > 0$, atunci condiţia din enunţ ar fi contrazisă pentru $y = 0$ şi $\varepsilon = m/2$. Prin urmare avem $m = 0$ şi $M = 1$. Deoarece însă o funcţie continuă definită pe un domeniu conex are proprietatea valorii intermediare (zisă şi Darboux), surjectivitatea rezultă imediat.
b) Un exemplu imediat (inspirat de funcţia lui Dirichlet) este $f(x) = x$ pentru $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, definită arbitrar în rest. $\square$

**Subiectul** (4)**.** *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale din intervalul* $[1,\infty)$*. Presupunem că şirul* $\left(y_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$*, definit prin* $y_n^{(k)} = \lfloor x_n^k \rfloor$*, pentru* $n \geq 1$*, este convergent pentru orice* $k \in \mathbb{N}^*$*. Să se demonstreze că şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

*Soluţie.* Problema pare redutabilă, dar este o simplă consecinţă a faptului că un şir convergent de numere întregi este finalmente constant. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se dovedeşte evident mărginit. Presupunerea de divergenţă, anume faptul că $\lambda = \liminf_{n\to\infty} x_n < \limsup_{n\to\infty} x_n = \Lambda$, duce imediat la contradicţie, căci atunci $\lim_{k\to\infty} (\Lambda^k - \lambda^k) = \infty$; pe de altă parte, pentru $\ell_k = \lim_{n\to\infty} y_n^{(k)}$, avem evident $|\Lambda^k - \lambda^k| = |(\Lambda^k - \ell_k) - (\lambda^k - \ell_k)| \leq |\Lambda^k - \ell_k| + |\lambda^k - \ell_k| < 2.$[4] $\square$

Problemele 2 şi 3 (de algebră liniară) au fost mai taxante decât această problemă 4. Punctajele sunt în general mai scăzute decât la celelalte clase, căci probabil – cu excepţia problemei 1 – problemele clasei a XI-a au fost mai laborioase şi dificile.

## 4. Clasa a XII-a

**Subiectul** (1)**.**
*a) Rezolvaţi ecuaţia* $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$*,* $x \in \mathbb{Z}_7$*.*
*b) Determinaţi numerele naturale* $n \geq 2$*, pentru care ecuaţia* $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$*,* $x \in \mathbb{Z}_n$*, are soluţie unică.*

*G.M.-B.*

*Soluţie.* Odată ce lucrez în $\mathbb{Z}_n$, refuz să folosesc notaţia greoaie şi învechită $\hat{a}$ pentru elemente $a \in \mathbb{Z}_n$.

[4] De observat că reciproca nu rămâne adevărată. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de $x_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent la limita 2, dar şirurile $\left(y_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$ sunt divergente pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, având fiecare exact două puncte de acumulare, anume $2^k - 1$ şi $2^k$.

a) Deoarece 2 este inversabil în $\mathbb{Z}_7$, se poate folosi formula obişnuită a ecuaţiei de gradul II, anume $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \equiv \dfrac{1}{2} \equiv 4 \pmod 7$, aşadar avem soluţie unică $x = 4$ (fapt nu de mirare, având în vedere punctul b)).
b) Evident că dacă $x$ este soluţie, atunci şi $1-x$ este soluţie (relaţiile Viète continuă să funcţioneze). Deoarece dorim soluţie unică, trebuie $x = 1-x$, adică $2x = 1$. Prin urmare 2 este inversabil în $\mathbb{Z}_n$ (deci $n$ impar), şi atunci se impune $x = 2^{-1}$. Introducând în ecuaţie, obţinem

$$2^{-2} - 2^{-1} + 2 = 2^{-2}(1-2+8) = 2^{-2} \cdot 7 \equiv 0 \pmod n,$$

de unde $n = 7$ ca unică posibilitate.

Nu-mi pot închipui ce vini au fost găsite în redactarea soluţiilor la această non-problemă; scoruri de 2.5, 3, 3, 4.5, 5.5, la copíi pe care îi cunosc, şi care ar rezolva acest exerciţiu la ora trei noaptea, într-un picior, cu o mână legată la spate şi un ochi închis (dacă nu chiar ambii). Ca şi la alte clase, să aşteptăm rezultatele contestaţiilor ca să putem vedea mai clar ... □

**Subiectul** (3)**.** *Determinaţi funcţiile continue şi crescătoare $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţia*

$$\int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}\,t \le \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

*oricare ar fi $x, y \in [0,\infty)$.*

*Soluţie.* Avem

$$0 \ge \int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x (f(y+t) - f(t))\,\mathrm{d}\,t \ge 0,$$

deci $\displaystyle\int_0^x (f(y+t) - f(t))\,\mathrm{d}\,t = 0$ oricare ar fi $x, y \in [0,\infty)$. Să presupunem că există $0 < x < y$ astfel încât $f(x) < f(y)$. Atunci, din doar monotonie,

$$0 = \int_0^x (f(y+t) - f(t))\,\mathrm{d}\,t \ge \int_0^x (f(y) - f(x))\,\mathrm{d}\,t = x(f(y) - f(x)) > 0,$$

contradicţie. Prin urmare $f(x) = c$(onstantă) pentru $x > 0$, cu şi $f(0) \le c$, iar aceste funcţii evident îndeplinesc condiţia cu integrale din enunţ. Totul este în ordine, căci monotonia este suficientă pentru a avea integrabilitate pe intervale mărginite. Dacă vrem neapărat să găsim funcţiile **continue**, această cerinţă nu face decât să forţeze şi $f(0) = c$.[5]

Este o uşoară naivitate a soluţiei oficiale să invoce continuitatea (căci monotonia este de ajuns), până la momentul final (şi inevitabil) $f(0) = c$.

[5] Cu o zi înainte de etapa judeţeană, următoarea problemă apare pe AoPS; aflu că este şi ea din G.M.-B. Find all non-decreasing functions $f, g, h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ so as to have

$$\int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^y h(t)\,\mathrm{d}\,t$$

for all $x, y \ge 0$. Soluţia postată determină faptul că $f = g = h = c$(onstantă) pe $(0,\infty)$.

O banalitate transparent deghizată ... Este o mare penurie de probleme interesante (cu toate unele anunţuri şi promisiuni vehiculate) dacă o astfel de chestiune a fost judecată corespunzătoare. □

**Subiectul** (4). *Fie $m$ şi $n$ două numere naturale, $n \geq 2$, fie $A$ un inel care are exact $n$ elemente, şi fie $a$ un element al lui $A$, astfel încât $1 - a^k$ este inversabil, oricare ar fi $k \in \{m+1, m+2, \dots, m+n-1\}$. Arătaţi că $a$ este nilpotent (i.e., există un număr natural nenul $p$, astfel încât $a^p = 0$).*

*Soluţie.* Problema este evident intenţionată a oferi o contrapoziţie afirmaţiei bine-cunoscute că dacă $a$ este nilpotent atunci $1 - a^k$ este inversabil pentru orice număr natural nenul $k$. Într-adevăr, dacă $a$ este nilpotent de ordin $p$ atunci şi $b = a^k$ este nilpotent de ordin cel mult $p$, şi acum având relaţia $(1-b)(1+b+\cdots+b^{p-1}) = 1 - b^p = 1$, obţinem imediat rezultatul dorit.

Fie $1 \leq \ell \leq n-1$. Atunci (măcar) unul dintre cele $n-1$ numere naturale consecutive din $\{m+1, m+2, \dots, m+n-1\}$ este divizibil prin $\ell$, deci $\ell \mid m + j = k$ pentru un $1 \leq j \leq n-1$. Deoarece atunci $1 - a^\ell \mid 1 - a^k$, rezultă că şi $1 - a^\ell$ este inversabil. Pentru $a = 0$ afirmaţia din problemă este trivială, deci fie $a \neq 0$. Dacă toate cele $n-1$ elemente $1 - a^\ell$, $1 \leq \ell \leq n-1$, ar fi distincte (şi nenule, fiind inversabile), ar rezulta că $A$ este corp, deci $a \neq 0$ inversabil; dar atunci $a^{n-1} = 1$ ar duce la $1 - a^{n-1} = 0$, absurd. Prin urmare există $1 \leq p < q \leq n-1$ cu $1 - a^p = 1 - a^q$, adică $0 = a^p(1 - a^{q-p})$, de unde $a^p = 0$, căci $1 - a^{q-p}$ este inversabil.[6]

Soluţia oficială se complică în mod inutil, folosind şi nişte notaţii uşor prolixe. □

Subiectele clasei a XII-a au fost de data aceasta cu totul banale (de obicei ele erau de bună calitate, dar ceva mai grele decât cele ale celorlalte clase).

## 5. ÎNCHEIERE

În rectificare la comentariile precedente, SSMR a revenit la postarea unei hărţi a României, cu link-uri pentru fiecare judeţ către problemele (şi uneori doar, soluţiile lor oficiale; păcat că nu la toate judeţele) etapei locale de acolo.

Ideea de a trece sub tăcere numele autorilor se perpetuează. Motivul lipsei acestei informaţii elementare mă eludează. Subiectele au fost văduve de strălucire. Calitatea generală a acestei etape judeţene este medie. S-a redus numărul de erori flagrante, dar problemele propuse sunt destul de anoste. Nici umbră de combinatorică – această disciplină care poate aduce sclipirea şi interesul unui concurs printr-un singur enunţ intrigant şi care îndeamnă la născocire. Culoarea gri predomină, nicio problemă nu este memorabilă şi nici nu trimite mai departe la curiozitatea care generează studiul şi erudiţia.

[6] Să remarcăm că nu este suficient să ştim doar că $1 - a^k$ este inversabil pentru $n-2$ valori $k \in \{m+1, m+2, \dots, m+n-2\}$, de exemplu pentru $A$ corp, $m = 0$, şi $a$ un element primitiv.

Am aflat recent că la etapa locală a Olimpiadei de Informatică – din Bucureşti, cel puţin – li s-a interzis copiilor să ia acasă foile cu testele de concurs. În ceea ce priveşte Olimpiada de Matematică, unele judeţe – să zicem Mehedinţi – nu au postat soluţiile oficiale, baremele, şi nici rezultatele (cele de la clasele de liceu). Este de înţeles, cu probleme greşite la clasele a V-a şi a IX-a, o soluţie complet eronată la clasa a XI-a, o greşeală de tipar la una din problemele clasei a XII-a (care o făcea de nerezolvat), şi o problemă 2 excesiv de grea la clasa a VIII-a (doar trei punctaje peste medie, la peste 60 de participanţi).[7]

Toate acestea îmi dau o idee. Pe viitor, la toate olimpiadele de ştiinţe, nu numai să se confişte foile cu subiecte la sfârşitul concursului, dar cu un dispozitiv ca din ”Men in Black” să i se şteargă fiecărui copil – la ieşirea din sală – amintirea ultimelor trei ore. Astfel se evită şi orice contestaţie, soluţiile oficiale şi baremele pot fi în mod ceremonios incinerate la sfârşitul corecturii, şi niciun ochi neavenit nu va vedea nimic – împiedicând astfel şi comentariile mele future.

[7] Mă face să-mi amintesc un cânticel din vremea studenţiei mele

Veniiiiţi să vedeţi
(câmpia sub lună)
ce-ngroapă pisica