Problema 4. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc de centru O şi rază 1, cu $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, şi numerele $x = a\sqrt{A} + b\sqrt{B} + c\sqrt{C}$, $y = a\sqrt{B} + b\sqrt{C} + c\sqrt{A}$, $z = a\sqrt{C} + b\sqrt{A} + c\sqrt{B}$.

a) Demonstraţi că există un triunghi XYZ cu laturile de lungimi x, y, z.

b) Dacă triunghiul XYZ de la punctul a) are $S_{XYZ} \geqslant \frac{9\sqrt{3}\pi}{4}$, demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral.

* * *

Soluţie. a) Deoarece $a + b > c$, $b + c > a$ şi $c + a > b$, obţinem:

$$x + y = (a + c)\sqrt{A} + (b + a)\sqrt{B} + (c + b)\sqrt{C} > b\sqrt{A} + c\sqrt{B} + a\sqrt{C} = z$$

şi relaţiile analoage, aşadar se poate construi un triunghi cu laturile de lungimi x, y, z.

b) Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz, obţinem:

$$x^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(A + B + C) = \pi(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (1)$$

Analog obţinem: $y^2 \leqslant \pi(a^2+b^2+c^2)$ (2) şi $z^2 \leqslant \pi(a^2+b^2+c^2)$. (3)

Folosind (1) şi (2), rezultă $S_{XYZ} = \frac{xy\sin Z}{2} \leqslant \frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)\sin Z}{2.}$ (4)

Analog obţinem:

$S_{XYZ} \leqslant \frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)\sin X}{2}$, (5) şi $S_{XYZ} \leqslant \frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)\sin Y}{2}$. (6)

Adunând inegalităţile (4), (5) şi (6), deducem:

$$S_{XYZ} \leqslant \frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)(\sin X + \sin Y + \sin Z)}{6}. \qquad (7)$$

Din $a^2+b^2+c^2 = 8(1 + \cos A\cos B\cos C) \leqslant 9$ şi $\sin X+\sin Y+\sin Z \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$, folosind (7) rezultă că $S_{XYZ} \leqslant \frac{9\sqrt{3}\pi}{4}$.

Utilizând ipoteza, deducem că $S_{XYZ} = \frac{9\sqrt{3}\pi}{4}$, deci trebuie să avem egalitate în fiecare dintre inegalităţile de la (1) la (7). Din (1) obţinem $\frac{\sqrt{A}}{a} = \frac{\sqrt{B}}{b} = \frac{\sqrt{C}}{c}$, deci $\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \frac{\pi}{a^2 + b^2 + c^2}$, iar din (2) rezultă analg că $\frac{B}{a^2} = \frac{C}{b^2} = \frac{A}{c^2} = \frac{\pi}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Aşadar $\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \frac{B}{a^2} = \frac{C}{b^2} = \frac{A}{c^2}$, deci $A = B = C$, adică triunghiul ABC este echilateral.