"OLIMPIADA" INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ "FORMULA OF UNITY" / "THE THIRD MILLENIUM" 2014/2015, RUNDA I

Abstract. Comments on some of the problems recently asked at the International Mathematical Olympiad "Formula of Unity" / "The Third Millenium" 2014/2015, Round I.

Data: 5 decembrie 2014 (o zi marcată în calendar).
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

0. Introducere

Aceste comentarii asupra **Olimpiadei Internaţionale de Matematică "Formula of Unity" / "The Third Millenium"** 2014/2015, Runda I, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Prezentare

A doua ediţie – de anul trecut – a acestui eveniment a fost comentată pe larg de mine în câteva materiale aflate în arhiva de ştiri. Trimit acolo pentru amănunte istorice, şi nu numai. Este se pare o continuare a unui concurs mai vechi, numit **"The Third Millenium"**. *De facto*, **"Formula of Unity"** este o traducere din expresia esperanto **"Formulo de Integreco"**, pe care, cred, grupul de lobby spaniol implicat l-a propus (deşi un robot de traducere oferă mai degrabă **"Formula of Integrity"**, ceea ce este oarecum comic). O Rundă II (finală) va urma la data de 1 februarie 2015, pentru cei calificaţi din Runda I, şi va conduce la acordarea de premii şi invitaţii la o tabără de vară de matematică, în Rusia.

[1]Adresele de Internet sunt

`http://www.formulo.org/en/olympiad/15`
`http://www.euler-foundation.org/`

Lipsesc multe probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Ordinea este dinspre clasa a XII-a către clasa a VI-a, căci multe probleme sunt reluate, cu o versiune poate "mai grea" la clasa cea mai mare. Fiecare clasă de gimnaziu a avut 6 probleme de rezolvat, iar fiecare clasă de liceu a avut 10 (crescut de la tot 6 anul trecut). Rezultatele nu au fost încă făcute cunoscute; soluţiile (oficiale) au fost finalmente postate! (☞pagina **2** la `http://www.formulo.org/en/olympiad/15`), dar ...

2. Clasa a XII-a

Subiectul (2)**.** *Andrei a înmulţit două numere naturale consecutive şi a obţinut ca rezultat un număr care într-o anumită bază de numeraţie se scrie ca număr de două cifre consecutive, fiecare cifră nefiind mai mare decât* 9*. Determinaţi toate aceste numere.*

Soluţie. Enunţul original în limba engleză cere find these **digits**. Este o uriaşă diferenţă, căci **nu** se cer **toate numerele** care produc acest lucru, ca în (înţelesul normal din) versiunea în limba română. După cum se va vedea, soluţia se complică, trebuind a face această precizare.

Rezultatul trebuie aşadar să fie de forma $(x-1)x = \overline{(d-1)d}_{(b)}$, unde $2 \leq d \leq \min\{b-1, 9\}$. Prin urmare $d - 1 = \dfrac{(x-1)x-1}{b+1}$. Dar $(x-1)x-1$ nu se poate divide cu 2, 3, nici 7, deci $1 \leq d-1 \leq 8$ nu poate fi decât 1 sau 5, prin urmare nu există decât cazurile $\boxed{\overline{12}_{(b)} \text{ şi } \overline{56}_{(b)}}$, ambele realizabile, de exemplu prin $7 \cdot 8 = \overline{56}_{(10)} = \overline{12}_{(54)}$ (cu $2 \cdot 3 = \overline{12}_{(4)}$ minimal pentru $\overline{12}_{(b)}$). Există însă infinit de multe numere consecutive $x-1$ şi x care conduc la rezultatul dorit, şi anume doar şi numai doar

- pentru orice $x \geq 3$, luând $b = \big((x-1)x-1\big) - 1 = (x-2)(x+1)$, care duce la $\overline{12}_{(b)}$;
- pentru orice $x \equiv 3 \pmod 5$ cu $x \geq 8$, luând $b = \dfrac{(x-1)x-1}{5} - 1 = \dfrac{(x-3)(x+2)}{5}$, care duce la $\overline{56}_{(b)}$.

Există însă o ambiguitate şi în enunţul original. Oare numărul 32 nu are două cifre consecutive? Depinde de considerarea cuvântului "consecutiv" ca implicând "crescător" sau nu. Dacă nu, rezultatul poate fi şi de forma $(x-1)x = \overline{d(d-1)}_{(b)}$, unde $1 \leq d \leq \min\{b-1, 9\}$. Aşadar $d = \dfrac{(x-1)x+1}{b+1}$. Dar $(x-1)x+1$ nu se poate divide cu 2, 5, nici 9, deci $1 \leq d \leq 9$ nu poate fi decât 1, 3 sau 7, prin urmare nu există decât cazurile $\boxed{\overline{10}_{(b)}}$, $\boxed{\overline{32}_{(b)}}$ şi $\boxed{\overline{76}_{(b)}}$, toate trei realizabile, de exemplu prin $1 \cdot 2 = \overline{10}_{(2)}$, $4 \cdot 5 = \overline{32}_{(6)}$ şi $9 \cdot 10 = \overline{76}_{(12)}$. Există însă infinit de multe numere consecutive $x-1$ şi x care conduc la rezultatul dorit; nu mai intru în detalii. □

Subiectul (3)**.** *Să se arate că printre orice* 30 *de termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice de numere naturale cu raţia* 2061*, nu există mai mult de* 20 *de pătrate perfecte.*

Soluţie. Deoarece $2061 \equiv 1 \pmod{10}$, termenii progresiei reduşi modulo 10 formează un factor de lungime 30 al cuvântului infinit $(0123456789)^*$. Deoarece resturile pătratice modulo 10 sunt $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, în mod sigur $4 \cdot \dfrac{30}{10} = 12$ termeni nu pot fi pătrate perfecte, deci cel mult $\boxed{18}$ pot fi.

Sunt curios ce anume i-a făcut pe propunători, dintre toate numerele cu cifra unităţilor 1, să-l aleagă tocmai pe 2061; o fi valoarea în ruble (nu foarte mare, în bani reali) a onorariului primit (pentru o treabă de mântuială) ...

O primă "sub-calificare" a rezultatului obţinut (şi în soluţia oficială). De ce să se ceară 20, când un raţionament trivial obţine 18? Poate pentru că dacă raţia ar fi fost 0 sau 5 modulo 10, raţionamentul de sus nu mai merge, dar atunci mai bine se cerea 23, căci un rezultat clasic, atribuit lui Fermat şi revizitat de Euler,[2] spune că nu există progresie aritmetică de numere raţionale, de lungime 4, formată din doar pătrate perfecte, deci cel mult $3\cdot\dfrac{28}{4}+2 = 23$ de termeni pot fi potenţial pătrate perfecte. Dar realitatea este departe de aceste valori! Progresia aritmetică $\{1 + 24k \mid k = 0, 1, \dots, 29\}$ conţine doar 9 pătrate perfecte, şi este conjecturat că acest rezultat este optim.[3]

Absenţa calificării termenilor progresiei ca fiind numere naturale este moştenită din chiar enunţul original. □

Subiectul (4)**.** *Dacă x, şi y sunt numere reale care satisfac inegalitatea*

$$x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \le 0,$$

arătaţi că $x \ge -\dfrac{1}{6}$.

Soluţie. O ciudată ordonare a termenilor expresiei; nici după gradele totale ale monoamelor, nici după gradele în x, şi nici după gradele în y. Oare? pentru a masca rescrierea

$$x^4y^2 + 2x^2(x + 3)y + x^2 + 8 \le 0,$$

care conduce la $\Big(x^2y - (x + 3)\Big)^2 - (6x + 1) \le 0$, de unde facila concluzie $6x + 1 \ge \Big(x^2y - (x + 3)\Big)^2 \ge 0$, adică $\boxed{x \ge -\dfrac{1}{6}}$, cu egalitate posibilă pentru $x = -\dfrac{1}{6}$ şi $y = 102$, când expresia ia chiar valoarea 0. □

Subiectul (5)**.** *Maria pictează pătrăţelele unei table albe formată din* 10×10 *pătrăţele. Ea poate picta orice rând în roşu şi orice coloană în albastru (orice rând şi orice coloană este pictat sunt pictate cel mult o data dată). Dacă un pătrăţel roşu este re-pictat în albastru, el devine albastru şi dacă un pătrăţel albastru este re-pictat în roşu, vopselele intră în reacţie şi pătrăţelul îşi pierde culoarea (el devine alb). Este posibil ca Maria să obţină exact* 33 *de pătrăţele roşii pe tablă?*

[2]Vezi `http://maths.mq.edu.au/ alf/SomeRecentPapers/183.pdf`, o clară şi excelentă prezentare făcută de un mare matematician.

[3]Vezi `http://www.dms.umontreal.ca/ andrew/PDF/SquaresinAPs.pdf`, un seminal şi lung articol, tot al unui colectiv de mari matematicieni.

Soluţie. Nu are nicio importanţă în ce ordine sunt re-pictate unele pătrăţele, şi ce culoare primesc; important este că ele nu vor fi roşii. Dacă sunt deci pictate $0 \le r \le 10$ rânduri şi $0 \le c \le 10$ coloane, numărul de pătrăţele roşii obţinute va fi $10r - cr = (10-c)r \neq 3 \cdot 11 = 33$. □

Subiectul (6)**.** *Pentru orice $a > 1$ este adevărat că*

$$\log_{\sqrt{a}}(a+1) + \log_{a+1}\sqrt{a} \ge \sqrt{6}?$$

Este oare totdeauna adevărat că $\log_{\sqrt{a}}(a+1) + \log_{a+1}\sqrt{a} \ge \sqrt{6}$ dacă $a > 1$?

Soluţie. Enunţul din originalul în limba engleză

"Is it always true that $\log_{\sqrt{a}}(a+1) + \log_{a+1}\sqrt{a} \ge \sqrt{6}$ if $a > 1$?"

a fost tradus cu o topică stranie pentru limba română, care chiar poate induce interpretări greşite ...

Pentru $a > 1$ avem $a + 1 > \sqrt{a} > 1$, deci ambii logaritmi sunt pozitivi; deoarece $\log_{\sqrt{a}}(a+1) = \dfrac{1}{\log_{a+1}\sqrt{a}}$, notând $x(a) = \log_{\sqrt{a}}(a+1) > 0$ vom avea $x(a) > \log_{\sqrt{a}} a = 2$. Dar funcţia $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ este crescătoare pe $[1, \infty]$, deci $f(x(a)) > f(2) = \dfrac{5}{2} > \sqrt{6}$. Deoarece $\lim\limits_{a\to\infty} \log_{\sqrt{a}}(a+1) = 2$, rezultă că valoarea $\boxed{\dfrac{5}{2}}$ este chiar infimumul expresiei (de ne-atins). Este malițioasă utilizarea valorii mai "slabe" $\sqrt{6}$, mai ales în conjuncţie cu semnul $\ge$. □

Subiectul (9)**.** *În triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ avem*

$$\sin A = \cos A_1, \quad \sin B = \cos B_1, \quad \sin C = \cos C_1.$$

Aflaţi toate valorile posibile ale celui mai mare dintre aceste şase unghiuri.

Soluţie. Avem deci $A = 90° \pm A_1$, $B = 90° \pm B_1$, $C = 90° \pm C_1$ (triunghiul $A_1B_1C_1$ este evident ascuţitunghic). Pentru un triunghi ABC ascuţitunghic s-ar obţine imediat $180° = A + B + C = 270° - (A_1 + B_1 + C_1) = 90°$, absurd. Pentru un triunghi ABC obtuzunghic, să zicem în A, se obţine imediat $180° = A + B + C = 90° + 2A_1$, de unde $A_1 = 45°$ şi $A = \boxed{135°}$. □

Subiectul (10)**.** *Arătaţi că numerele $d(1) + d(2) + \cdots + d(n)$ şi $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ au aceeaşi paritate, unde $d(k)$ şi $\lfloor x \rfloor$ desemnează numărul divizorilor naturali ai numărului natural k şi respectiv partea întreagă a numărului real x.*

Soluţie. Este arhicunoscut (şi trivial de demonstrat) că $d(k)$ este impar dacă şi numai dacă k este pătrat perfect. Deci $\sum_{k=1}^{n} d(k)$ schimbă paritatea doar când n este pătrat perfect, deci are paritatea lui $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, căci $d(1) = \lfloor\sqrt{1}\rfloor = 1$. Desigur, soluţia oficială urmăreşte aceeaşi idee, dar conţine şi o înduioşătoare "scăpare", vorbind despre desperecheatul divizor $\sqrt{n}$ când n **nu** este pătrat perfect, ha ha. □

3. CLASA A XI-A

Subiectul (1)**.** *Se consideră un pătrat. Determinaţi câte un punct pe fiecare latură a pătratului dat astfel încât patrulaterul având vârfurile în aceste puncte să aibă perimetrul minim.*

Soluţie. Idee arhicunoscută. Reflectăm pătratul de trei ori, transformând perimetrul patrulaterului într-o linie frântă; lungimea minimă se obţine când linia este dreaptă, la unghiuri de 45° cu laturile pătratului, deci pentru cazul când patrulaterul este un dreptunghi cu laturile paralele cu diagonalele pătratului şi deci perimetru (minim) egal cu dublul lungimii unei diagonale. Drăguţă, dar în vârstă; ”din spate liceu, din faţă muzeu”, sau ”exo kukla, kai meso panucla” în nobila greacă. □

Subiectul (3)**.** *Acelaşi cu Subiectul 2 de la clasa a XII-a. De remarcat că aici se cere, în mod şi mai clar eronat (şi cu o lejeră cacofonie cadou), Determinaţi toate exemplele care verifică condiţia de mai sus.*

Subiectul (4)**.** *Acelaşi cu Subiectul 3 de la clasa a XII-a. De remarcat că aici apare însă* 30*de în loc de* 30 *de.*

Subiectul (5)**.** *Acelaşi cu Subiectul 4 de la clasa a XII-a.*

Subiectul (6)**.** *Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi următorul sistem de ecuaţii:*

$$\begin{cases} 2^a + 3^b = 5^b \\ 3^a + 6^b = 9^b \end{cases}$$

Soluţie. O **oribilă** eroare în enunţul original din limba engleză, repercutată evident şi în versiunea din limba română. Doar consultând ”soluţia oficială” se poate vedea că era intenţionat ca a doua ecuaţie să fi fost $3^a + 6^b = 9^a$.

Oricum, se intenţiona probabil rezolvarea în numere **reale**, nu **întregi**. Din prima ecuaţie rezultă uşor $b > 0$, şi WolframAlpha afirmă că ecuaţia

$$\log_2(5^b - 3^b) = a = \log_3(9^b - 6^b)$$

în $b \in (0, \infty)$ are singura soluţie $b = 1$, pentru care şi $a = 1$, deci chiar şi aşa am avea un răspuns – acelaşi ca şi în varianta probabil intenţionată, pentru care o soluţie elementară urmează.

Din prima ecuaţie, scrisă $2^a - 2^b = 5^b(1-(3/5)^b-(2/5)^b)$ rezultă $a \geq b \geq 1$ sau $a \leq b \leq 1$. Din a doua ecuaţie, scrisă $6^b - 6^a = 9^a(1 - (3/9)^a - (6/9)^a)$ (dacă ar fi fost $3^a + 6^b = 9^a$, aşa cum soluţia oficială lasă să se înţeleagă) rezultă $b \geq a \geq 1$ sau $b \leq a \leq 1$. Împreună, aceste inegalităţi duc la $a = b$, şi atunci valoarea comună este 1.

Dacă ne limităm la doar numere întregi, doar din a doua ecuaţie, scrisă $3^a = 3^b(3^b - 2^b)$ sau $6^b = 3^a(3^a - 1)$ (în funcţie de varianta de lucru) rezultă $a = b = 1$. Versiunea în numere întregi este ridiculă.

Întreaga chestiune este astfel ratată, oricum am lua-o. □

Subiectul (7)**.** *Acelaşi cu Subiectul 5 de la clasa a XII-a.*

Subiectul (9)**.** *Acelaşi cu Subiectul 9 de la clasa a XII-a.*

Subiectul (10)**.** *Rezolvaţi în mulţimea numerelor prime ecuaţia:*

$$100q + 80 = p^3 + q^2.$$

Soluţie. Iarăşi, se face probabil presupunerea tacită şi naivă că numerele prime sunt **pozitive**.

Scriem egalitatea ca $p^3 + (q - 50)^2 = 2580$. Lucrând sub ipoteza foarte probabilă că s-a intenţionat $p > 0$, se verifică direct că ecuaţia nu are soluţii pentru $1 \leq p \leq 13$, iar pentru $p \geq 14$ avem $p^3 > 2580$, absurd.

Oricum, primalitatea celor două variabile ajută "ca prişniţele la un picior de lemn"; o "supra-calificare" inutilă, ridiculă, pernicioasă şi paternalistă.

Scriind egalitatea ca $(q - 50)^2 = (-p)^3 + 2580$, aceasta este o ecuaţie Mordell care nu are soluţii întregi[4] **de niciun fel**. Poate că s-au greşit constantele, credeam eu, până ce m-am convins din soluţia oficială că aceasta era chiar intenţia. Măcar să se fi ales nişte constante pentru care să existe o biată soluţie ... □

4. Clasa a X-a

Subiectul (1)**.** *Arătaţi că pentru orice număr natural $n > 3$ există un poligon cu n laturi care are proprietatea că orice două diagonale ale sale nu sunt paralele.*

Soluţie. Vom arăta că există chiar un astfel de poligon convex, inscriptibil. Pentru $n = 3$ pornim la drum cu orice triunghi (daţi-mi voie să extind problema şi la cazul $n = 3$). Odată ce avem un astfel de poligon cu n laturi, ducem prin fiecare vârf al său drepte paralele cu toate laturile şi diagonalele poligonului; ele intersectează cercul circumscris într-un număr finit de puncte. Alegem acum un al $(n+1)$-lea vârf în orice punct de pe cerc, diferit de cele de mai sus. Poligoanele astfel construite în mod inductiv nu au paralelisme între dreptele de suport ale laturilor şi diagonalelor lor. □

Subiectul (2)**.** *Suma a trei numere întregi pozitive este* 100. *Care este cea mai mică valoare posibilă a celui mai mic multiplu comun al lor?*

Soluţie. Soluţia pentru suma 10 în loc de 100 este imediată; deoarece cel mai mare dintre numere este cel puţin 4, rezultă că valoarea cerută este cel puţin 4, iar exemplul $2+4+4 = 10$ arată că valoarea 4 se poate chiar atinge. Aceasta sugerează valoarea 40, cu exemplul $20 + 40 + 40 = 100$. Deoarece cel mai mare dintre numere este cel puţin 34, rămân de verificat cazurile

• $34 = 2 \cdot 17$. Atunci celelalte două numere aparţin mulţimii $\{1, 2, 17, 34\}$, ceea ce evident nu este posibil;

• $35 = 5 \cdot 7$. Atunci celelalte două numere aparţin mulţimii $\{1, 5, 7, 35\}$, ceea ce evident nu este posibil;

---
[4] Vezi tabelul complet de la `http://hr.userweb.mwn.de/numb/mordell.gz`.

• $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Atunci celelalte două numere trebuie să aparţină mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, ceea ce evident nu este posibil;
• $37 = 1 \cdot 37$. Atunci celelalte două numere aparţin mulţimii $\{1, 37\}$, ceea ce evident nu este posibil;
• $38 = 2 \cdot 19$. Atunci celelalte două numere aparţin mulţimii $\{1, 2, 19, 38\}$, ceea ce evident nu este posibil;
• $39 = 3 \cdot 13$. Atunci celelalte două numere aparţin mulţimii $\{1, 3, 13, 39\}$, ceea ce evident nu este posibil.

Prin urmare valoarea $\boxed{40}$ este cea mai mică posibil. Plicticos. □

Subiectul (4)**.** *Acelaşi cu Subiectul 2 de la clasa a XII-a.*

Subiectul (6)**.** *Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia*

$$2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014.$$

Soluţie. Traducerea în limba română păcătuieşte, oferind numere naturale în loc de positive integers din originalul în limba engleză, care înseamnă numere naturale nenule. Potenţial, aceasta ar fi putut îngreuna soluţionarea, dar din fericire problema este oricum trivială.

Avem $2^a = 2^b(2^c + 1) + 2 \cdot 1007$, de unde $a > 10$, ceea ce forţează $\boxed{b = 1}$, şi deci $2^{a-1} = 2^c + 1008 = 2^c + 2^4 \cdot 63$. Trebuie deci $\boxed{c = 4}$, şi prin urmare $2^{a-5} = 64 = 2^6$, de unde $\boxed{a = 11}$. Soluţia oficială "ghiceşte" doar scrierea $2014 = 2^{11} - 2^1 - 2^5$, şi apoi trimite la unicitatea scrierii în baza 2. □

Subiectul (9)**.** *Acelaşi cu Subiectul 9 de la clasa a XII-a.*

5. CLASA A IX-A

Subiectul (1)**.** *Acelaşi cu Subiectul 1 de la clasa a X-a.*

Subiectul (4)**.** *Se dau 15 numere compuse mai mici sau egale cu 2014. Arătaţi că există printre ele două numere având cel mai mare divizor comun al lor mai mare decât 1.*

Soluţie. Există doar 14 numere prime în mulţimea $\{1, 2, \ldots, 2014\}$, anume

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\},$$

cu proprietatea că pentru $p \in P$ avem $p^2 \leq 2014$. Fiecare dintre cele 15 numere compuse are deci un factor prim din P, şi din principiul cutiei, două dintre ele vor avea un factor prim (din P) comun.

Este clar că acest rezultat trivial este cel mai strâns posibil. Mulţimea $\{p^2 \mid p \in P\} \subset \{1, 2, \ldots, 2014\}$ are 14 elemente, numere compuse mutual coprime. □

Subiectul (6)**.** *În mijlocul unui număr oarecare de şase cifre se inserează semnul înmulţirii. Rezultatul înmulţirii celor două numere de trei cifre astfel obţinute este de 7 ori mai mic decât numărul iniţial. Aflaţi numărul iniţial.*

Soluţie. Fie $N = \overline{abcdef}$ numărul de **şase** cifre, deci cu $a \geq 1$. Notând $A = \overline{abc}$ şi $B = \overline{def}$, avem $N = 7AB$, adică $10^3 A + B = 7AB$. Prin SFFT (*Simon's Favourite Factorization Trick*) scriem $(7A-1)(7B-1000) = 2\cdot 500$. Dar $A \geq 100$ duce la $7A - 1 \geq 699 > 500$, prin urmare suntem forţaţi să avem $7A - 1 = 1000$ şi $7B - 1000 = 1$, deci $A = B = 143$ şi $\boxed{N = 143\,143}$.

Ambele enunţuri – în engleză şi română – păcătuiesc uşor numind *a priori* A şi B ca fiind numere de trei cifre; într-adevăr acesta este cazul pentru A, căci $a \neq 0$, dar B ar putea fi un număr de mai puţine cifre dacă $d = 0$, ceea ce nu este exclus din oficiu. Soluţia oficială este şi ea inutil complicată şi aproximativă în concluzii, şi prin aceasta uşor ridiculă pentru o astfel de problemă extrem de uşoară. □

Subiectul (8)**.** *Un număr întreg pozitiv îl vom numi ”crescător” dacă fiecare din cifrele sale este mai mare decât cifra precedentă (de exemplu* 7 *şi* 3579 *sunt crescătoare, dar* 2447 *nu este). Care este numărul minim de numere crescătoare a căror sumă este* 2014*?*

Soluţie. Un exemplu (din multe altele) cu $\boxed{3}$ numere este $1257 + 468 + 289$. Dacă s-ar putea cu numai două numere, atunci unul trebuie a fi de forma $\overline{1abc} \leq 1789$ iar celălalt $\overline{def}$, cu $1 < a < b < c$ (deci $c \geq 4$) şi $2 \leq d < e < f$ (deci $f \geq 4$). Dar atunci trebuie $c + f = 14$, $b + e + 1 = 11$ şi $a + d + 1 = 10$, deci $a+d = b+e-1$, imposibil, căci trebuie $a+d \leq (b-1)+(e-1) = b+e-2$. O problemă cu interes matematic scăzut, după mine. □

Subiectul (9)**.** *Acelaşi cu Subiectul 6 de la clasa a X-a. De remarcat că aici traducerea în limba română foloseşte exprimarea alternativă numere întregi pozitive, care însă după unii tot include pe zero.*

Subiectul (10)**.** *Măsurile unghiurilor* B *şi* C *ale triunghiului* ABC *sunt* $30°$ *şi respectiv* $105°$*, iar* P *este mijlocul lui* $[BC]$*. Care este măsura unghiului* BAP*?*

Soluţie. Expresia BAP lipseşte cu desăvârşire din enunţul în limba română, îngreunând în oarecare măsură rezolvarea ... nu-i aşa?!? Răspunsul este $\boxed{\angle BAP = 15°}$, obţinut printr-o simpatică, facilă construcţie auxiliară. □

6. CLASA A VIII-A

Subiectul (1)**.** *O lună dintr-un an o vom numi ”lună grea” dacă ea conţine exact* 5 *zile de luni, luni fiind prima zi dintr-o săptămână. Câte luni grele pot fi într-un an?*

Soluţie. Ambiguitatea din limba română, între <u>luni</u>, numele primei zile a săptămânii, şi pluralul cuvântului <u>lună</u>, se putea rezolva mai elegant prin folosirea ghilimelelor zile de ”luni”; aşa cum apare, parcă e în batjocură. Era mai distractiv (şi mai apropriat) dacă chiar în engleză s-ar fi folosit ”manic” (de la *manic Mondays*)!

Răspunsul este evident $\boxed{4 \text{ sau } 5}$, din calcule imediate. □

Subiectul (3)**.** *Acelaşi cu Subiectul 2 de la clasa a X-a.*

Subiectul (4)**.** *Numerele* $1, 2, \ldots, 10$ *sunt aşezate pe un cerc într-o ordine oarecare. Arătaţi că totdeauna vor exista trei numere vecine pe cerc a căror sumă să nu fie mai mică decât* 18.

Soluţie. O altă idee arhicunoscută. În afară de numărul 1, celelalte formează trei triplete disjuncte de numere vecine cu suma 54, deci (măcar) unul are suma cel puţin 18. Un exemplu care arată că această valoare poate fi exact atinsă drept sumă maximă este $1, 10, 5, 3, 8, 6, 4, 2, 9, 7, (1)$. $\square$

Subiectul (5)**.** *Trei stilouri, patru creioane şi o riglă costă* 26 *de dolari. Cinci stilouri, şase creioane şi trei rigle costă* 44 *de dolari. Cât costă două stilouri şi trei creioane?*

Soluţie. Sistemul de ecuaţii este $\left\{\begin{array}{l} 3s + 4c + \ \ r = 26 \\ 5s + 6c + 3r = 44 \end{array}\right.$. Eliminăm pe r între cele două ecuaţii şi obţinem $2s+3c = \boxed{17}$. Clasa a VIII-a? pardon? Sunt de acord că unele probleme vor fi mai uşoare, dar există totuşi limite pentru un concurs internaţional, şi pentru nivelul clasei, care nu ar trebui depăşite. $\square$

Subiectul (6)**.** *Aflaţi cel mai mic număr întreg pozitiv care începe şi se termină cu* 11 *şi este divizibil cu* 7. *Demonstraţi că numărul găsit este într-adevăr cel mai mic posibil.*

Soluţie. Numerele 11, 111 şi 1111 nu se divid prin 7. Dintre numerele $\overline{11d11}$, cu $0 \leq d \leq 9$, sigur (măcar) unul se divide prin 7, şi aşa se face că cel mai mic dintre ele, anume $\boxed{11011}$, este răspunsul cerut. Evident, aici eroarea de traducere în limba română, prin omisiunea cerinţei şi se termină cu 11, este instrumentală, căci răspunsul $\boxed{112}$ este **greşit** pentru întrebarea corectă, aşa cum este de altfel tratată şi în soluţia oficială. $\square$

7. CLASA A VII-A

Subiectul (1)**.** *Acelaşi cu Subiectul 1 de la clasa a VIII-a.*

Subiectul (4)**.** *Se consideră două clase având câte* 30 *de elevi fiecare. Numărul băieţilor din prima clasă este de două ori mai mare decât numrul băieţilor din cea de-a doua clasă, în timp ce numărul fetelor din prima clasă este de trei ori mai mic decât numărul fetelor din a doua clasă. Câte fete şi câţi băieţi sunt în fiecare din cele două clase?*

Soluţie. Sistemul de ecuaţii este $\left\{\begin{array}{rl} b_1 + f_1 = & 30 = b_2 + f_2 \\ b_1 = & 2b_2 \\ 3f_1 = & f_2 \end{array}\right.$. Obţinem uşor $5b_2 = 3b_1 - b_2 = 60$, de unde $\boxed{b_2 = 12, b_1 = 24, f_2 = 18, f_1 = 6}$. Clasa a VII-a? pardon? $\square$

Subiectul (5)**.** *Acelaşi cu Subiectul 5 de la clasa a VIII-a.*

Subiectul (6)**.** *Iniţial, numărul* 1 *este scris pe tablă. Următoarele operaţii sunt permise – (A) să înmulţim numărul cu* 2*, sau (B) să rearanjăm cifrele numărului. Este oare posibil ca după câteva asemenea operaţii să obţinem numărul* 209*?*

Soluţie. $\boxed{\text{DA.}}$ Următoarea derivare produce pe 209

$1 \mapsto 2 \mapsto \cdots \mapsto 256 \mapsto 265 \mapsto 530 \mapsto 305 \mapsto 610 \mapsto 160 \mapsto 320 \mapsto 230 \mapsto 460 \mapsto 920 \mapsto 209.$

Un exerciţiu plictisitor şi neştiinţific (fără nicio motivare pentru paşii folosiţi) de a obţine rezultatul dorit. Metoda retrogradă din soluţia oficială, oferită drept panaceu, nu ajută prea mult, căci apar imediat posibile bifurcări. Măcar la reluarea problemei, de la clasa a VI-a, ceva raţionament matematic este implicat. □

8. CLASA A VI-A

Subiectul (1)**.** *Acelaşi cu Subiectul 1 de la clasa a VIII-a.*

Subiectul (4)**.** *Acelaşi cu Subiectul 4 de la clasa a VII-a.*

Subiectul (5)**.** *Acelaşi cu Subiectul 5 de la clasa a VIII-a.*

Subiectul (6)**.** *Iniţial, numărul* 1 *este scris pe tablă. Următoarele operaţii sunt permise – (A) să înmulţim numărul cu* 3*, sau (B) să rearanjăm cifrele numărului. Este oare posibil ca după câteva asemenea operaţii să obţinem numărul* 999*?*

Soluţie. $\boxed{\text{NU.}}$ Numărul 999 se poate obţine doar în urma a trei operaţii (A) astfel $37 \mapsto 111 \mapsto 333 \mapsto 999$, dar 37 nu se divide prin 3, iar ambele operaţii păstrează divizibilitatea prin 3, cu prima operaţie trebuind a fi $1 \mapsto 3$. Un exemplu tipic de ceea ce se numeşte ”metoda retrogradă”. Asemănător cu Subiectul 6 de la clasa a VII-a, dar ”seamănă şi nu răsare”. □

9. ÎNCHEIERE

Varianta în limba română (cred, produsă de către profesorii participanţi din România, şi nu de către organizatorii din Rusia; oricum, în cazul unor discrepanţe cu versiunea principală din limba engleză, ei erau responsabili cu semnalarea lor) conţine destule greşeli de traducere, o topică a frazei deseori stranie, şi omisiuni care în unele cazuri s-au dovedit instrumentale, denaturând întrebarea şi ducând la un răspuns incorect.[5]

[5]Alte transgresii, la probleme omise în prezentarea de faţă, cuprind folosirea lui deasemenea în loc de de asemenea, bisectoarea în loc de o bisectoare, consider în loc de consideră, sa în loc de să, fie gale în loc de fi egale, aşează în loc de aşază.

Nu că limba versiunii engleze produse de organizatori ar fi fost şi ea de prea bună calitate, cu atât mai puţin în soluţiile oficiale. Un matematician bulgar, cu ocazia unei Balcaniade de matematică de acum câţiva ani, a făcut remarca hazlie că toată lumea se înţelege acolo de minune, în această limbă universală care este ”broken English”! Poate că ideea de a face **esperanto** limbă oficială a olimpiadei nu este chiar atât de *farfelue*.

Editorul de text folosit (probabil WORD) a condus şi el la o prezentare cu o estetică mult inferioară originalului preparat în (mult) mai potrivitul (pentru zilele noastre) LaTeX. De altfel soluţiile oficiale sunt şi ele prezentate în WORD, şi în unele locuri arată foarte urât.

Gradul de dificultate a problemelor a fost extrem de redus, mai ales ţinând cont că această Rundă I a acordat **trei săptămâni** drept timp de lucru, între 1 şi 21 octombrie 2014. Nu am găsit nicio întrebare dintre cele prezentate, care să fie cât de cât *challenging*. Sunt totuşi unele probleme la care soluţia (oficială) este relativ lungă, şi impune deci ideea că este relativ complicată; problema 7 clasa a IX-a, problema 7 clasa a X-a, infama problemă 6 clasa a XI-a (cu o impardonabilă şi inadmisibilă eroare), în fine, problemele 7 şi 8 clasa a XII-a.[6] Unele dintre aceste soluţii sunt într-adevăr aproape ilizibile în complicaţiile lor, denaturate şi de o exprimare defectuoasă, nu chiar pertinentă şi la obiect.

Cel puţin s-a renunţat la vâlva de anul trecut – cu articole în ziare, clipuri video şi postări pe facebook – reprezentând în mod cu totul exagerat importanţa şi dificultatea acestui concurs.

Discretion is the better part of valour, deşi *modestia nu este (neapărat şi întotdeauna) o virtute.*

[6]De remarcat că răspunsul 1296 din soluţia oficială la problema 7 clasa a X-a este eronat, valoarea corectă fiind cea dublă, 2592. Soluţia oficială la problema 8 clasa a XII-a scrie puteri $2K^2$ ca $2K2$. Poate mai sunt erori şi la altele din aceste ultime probleme, dat fiind că nu am avut timpul şi tragerea de inimă să le verific chiar pe toate ...